



Auxiliar 3: Funciones

Profesora: Jessica Trespalcios J.
Auxiliar: Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

Determine, según corresponda, asíntotas verticales, horizontales y dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 - 1}$

b) $g(x) = \frac{6x^2 + 18x - 60}{x^2 - 6x + 8}$

Considere la función $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{3}} + \sqrt{3 - x^2}$.

c) Encuentre el dominio y estudie la paridad y ceros de f .

P2. De libro

Considere la función f dada por $f(x) = \frac{x + 1}{2x + 1}$ y determine:

- Domino, Imagen, ceros y signos
- Inyectividad de f
- ¿Existe $f^{-1}: \text{Im}(f) \rightarrow \text{Dom}(f)$? Si es así entregue una formulación explícita de la misma
- Crecimiento de f en el intervalo $(-\infty, -1/2)$

P3. Matraca

Considere la función f dada por $f(x) = |x| - \sqrt{1 - |x|}$ y determine:

- Dominio, paridad, ceros y signos
- Crecimiento de f
- Imagen de f
- Inversa de $f|_{\text{Dom}(f) \cap (-\infty, 0)}$

P4. Matraca II

Considere la función $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x-3}} + 1$.

- Encuentre el dominio de f , es decir, el mayor conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ es un número real bien definido para todo $x \in A$.
- Encuentre el conjunto imagen $\text{Im}(f)$ y el/los cero/s de f .
- Pruebe que f es inyectiva y encuentre una fórmula para $f^{-1}: \text{Im}(f) \rightarrow A$.
- Pruebe que f es estrictamente decreciente.

P5. Matraca: EL Regreso

Considere la función $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x+1}} - \frac{1}{x}$.

- Pruebe que el dominio de f es $(-\infty, -1) \cup [1, \infty)$, es decir, el mayor conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ es un número real bien definido para todo $x \in A$ es $(-\infty, -1) \cup [1, \infty)$. Además, determine si $1 \in \text{Im}(f)$.
- Demuestre que f es estrictamente creciente en $(-\infty, -1)$.

Sugerencia: Puede ser útil estudiar el crecimiento de las funciones $x \mapsto \sqrt{1 - \frac{2}{x+1}}$ y $x \mapsto \frac{1}{x}$ por separado.

P6. Matraca: Ahora en el espacio

Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$.

- Estudie la paridad de f y encuentre el conjunto imagen $\text{Im}(f)$.
- Pruebe que f es inyectiva en $[0, \infty)$ y encuentre una fórmula para $f^{-1}: \text{Im}(f) \rightarrow [0, \infty)$.
- Pruebe que f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$.

P7. Solo P7

Considere la función definida por $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$.

- Determine $\text{Dom}(f)$, ceros, signos y paridad de f .
- Estudie intervalos de crecimiento o decrecimiento de f . Determine el conjunto imagen de f (o sea $\text{Im}(f)$ o $\text{Rec}(f)$ que es lo mismo), resolviendo explícitamente la ecuación $y = f(x)$.

P8. De controles

Considere la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|+1} & \text{si } |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2}x^3 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

- Determine $\text{Dom}(f)$, ceros, signos y paridad de f .
- Estudie intervalos de crecimiento o decrecimiento de f . Determine el conjunto imagen de f (o sea $\text{Im}(f)$ o $\text{Rec}(f)$, que es lo mismo), resolviendo explícitamente la ecuación $y = f(x)$.
- Muestre que f es inyectiva en su dominio y determine explícitamente $f^{-1}: \text{Im}(f) \rightarrow \text{Dom}(f)$.