

Introducción al Cálculo Verano 2024
FCFM, Universidad de Chile
Profesora Jessica Trespalacios Julio
Auxiliar Ignacio Dagach Abugattas

Resumen de Funciones

Dominio de una función

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. El *dominio de f* es el conjunto más grande $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ está bien definida para todo $x \in A$. Es decir:

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ está bien definida}\}.$$

Ceros de una función

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Llamaremos *ceros de f* al conjunto de las $x \in A$ tales que $f(x) = 0$. En estos puntos el gráfico de f corta el eje x .

Conjunto Imagen

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Llamaremos *conjunto imagen de f* al conjunto definido por:

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in A) f(x) = y\}.$$

Funciones Par e Impar

Diremos que $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función:

- **Par** si $\forall x \in A, -x \in A$ y $f(-x) = f(x)$.
- **Impar** si $\forall x \in A, -x \in A$ y $f(-x) = -f(x)$.

Inyectividad

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es *inyectiva* si:

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Esto significa que f asigna valores distintos a elementos distintos del dominio.

Sobreyectividad

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es *sobreyectiva* si:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad (\exists x \in A) f(x) = y.$$

Esto significa que todos los elementos del codominio son alcanzados por f .

Asíntotas Verticales para Funciones Racionales

Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Las *asíntotas verticales* de f se determinan por los valores de x donde el denominador $Q(x) = 0$, siempre que el numerador $P(x) \neq 0$ en esos puntos. Es decir, si x_0 es una raíz de $Q(x)$ pero no de $P(x)$, entonces $x = x_0$ es una asíntota vertical.

Asíntotas Horizontales para Funciones Racionales

Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grados m y n , respectivamente:

- Si $m < n$, entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal.
- Si $m = n$, entonces $y = \frac{a}{b}$, donde a y b son los coeficientes líderes de $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente, es una asíntota horizontal.
- Si $m > n$, la función no tiene asíntota horizontal.

Función Inversa

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función biyectiva. La función inversa $f^{-1}: \text{Im}(f) \rightarrow A$ se define por la relación:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y, \quad \forall y \in \text{Im}(f).$$

Propiedades del Valor Absoluto

Sea $x \in \mathbb{R}$. El valor absoluto de x , denotado $|x|$, tiene las siguientes propiedades:

- $|x| \geq 0$ y $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$.
- $|x| = |-x|$.
- $|xy| = |x| \cdot |y|$.
- $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.
- $|x| \geq a \iff x \leq -a \text{ o } x \geq a$.