

Resumen Auxiliar 1: Axiomas de Cuerpo

Introducción al Cálculo

Verano 2024, FCFM, Universidad de Chile

Jessica Trespacios Julio & Ignacio Dagach Abugattas



Axioma 1. (Conmutatividad)

- a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es un real y es independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x + y = y + x.$$

- b) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su producto es un real y es independiente del orden en que se haga el producto, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Axioma 2. (Asociatividad)

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x + (y + z) = (x + y) + z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Axioma 3. (Distributividad)

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x(y + z) = xy + xz$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad (x + y)z = xz + yz$

Axioma 4a. (Existencia de elemento neutro para la suma)

En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que no afectan el resultado de la operación suma. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x + e = x.$$

Todo elemento e que cumpla esta propiedad se dirá neutro para la suma.

Axioma 4b. (Existencia de elemento neutro para el producto)

En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que, por un lado son diferentes de 0 y por otro no afectan en la operación producto. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \cdot e = x.$$

Todos los elementos e que cumplen esta propiedad se llaman neutros para el producto.

Axioma 5. (Existencia de elementos inversos)

- a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a x , que se llaman opuestos o inversos aditivos de x , que satisfacen:

$$x + \text{opuesto}(x) = 0.$$

- b) Para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existen inversos multiplicativos o recíprocos de x , que satisfacen:

$$x \cdot \text{recíproco}(x) = 1.$$

Teorema 1.1. *El elemento neutro para la suma es único.*

Teorema 1.2. *El elemento neutro para el producto es único.*

Teorema 1.3.

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, el inverso aditivo es único.

2. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, el inverso multiplicativo es único.

- Al único neutro para el producto lo llamaremos “uno” y lo denotaremos 1.
- El axioma dice además que $1 \neq 0$.
- Los inversos aditivos y multiplicativos de x se denotan simplemente por $-x$ y x^{-1} , respectivamente.