Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-1 - Verano 2024 – Introducción al Cálculo

Auxiliar 1: Axiomas de Cuerpo

Profesora: Jessica Trespalacios J.
Auxiliar: Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones

a) Si m^2 es par, entonces m es par

b) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a + b = 1$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$

c) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $-a = -b$, entonces $a = b$

P2. Nuevos axiomas

Sea $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto regido por los sigueinte axiomas:

A1$[\ 2 \in \Theta, 3 \notin \Theta]$ **A2** $[x \in \Theta \implies 3x + 1 \in \Theta]$ **A3** $[x, y \in \Theta \implies x + y \in \Theta]$

Demuestre, justificando cada paso, que:

a) $9 \in \Theta$

b) $1 \notin \Theta$

c) $5 \in \Theta \implies 22 \in \Theta$

d) $x, y \in \Theta \implies 3x + 3y + 1 \in \Theta$

e) $x \in \Theta \implies -x \notin \Theta$

P3. Matraca

Usando los axiomas de cuerpo de $\mathbb{R}$, teoremas de unicidad de nuetros e inversos, y la propiedad absorbente del 0, demuestre que:

a) Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}, x^{-1} + yz^{-1} = (z + xy)(xz)^{-1}$

b) $1 + (-1)^{-1} = 0$

P4. Propuestos (Axiomas de Cuerpo)

Demuestre, utilizando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, que:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, (-1) \cdot x = -x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (-x)^{-1} = -(x^{-1})$

d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$

e) $\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}^*, a(b+d) = b(a+c) \implies ab^{-1} = cd^{-1}$

f) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (-(x^{-1}) + 1) \cdot x = x + (-1)$

g) $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, xy^{-1} = (x^{-1}y)^{-1}$

P5. Pequeña introducción a Axiomas de Orden

a) Definir **Axioma 6: Tricotomía**

b) Definir **Axioma 7: Clausura**

c) Definir **Relaciones de orden en** $\mathbb{R}$

d) Entender **Axioma 6: Tricotomía**

e) Entender **Axioma 7: Clausura**

f) Entender **Relaciones de orden en** $\mathbb{R}$

g) Utilice el **Axioma 6: Tricotomía** para desprender la siguiente propiedad:

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, una y solo una de las siguientes proposiciones es verdadera: i) $x > y$, ii) $x < y$, iii) $x = y$

h) Determine si los siguientes pares de conjunto y operación cumplen que el conjunto es cerrado bajo la operación respectiva.

i) $(\mathbb{N}, -)$
ii) $(\mathbb{Z}^*_+, \%)$
iii) $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, +)$

¿Qué se puede concluir con respecto a que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sea un cuerpo?