Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2002 - Electromagnetismo, Verano 2025

Control 3

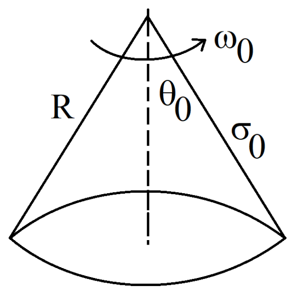
Profesores: I. Andrade, C. Arenas.

Miercoles 22 de Enero de 2025, 16:00. Duración 3 horas

El desarrollo de este control es individual. Los desarrollos deben ser completos y claros. Las preguntas se entregan en hojas separadas. Agregar el nombre y RUT a cada hoja. Las consultas son en voz alta, desde el puesto y son sólo sobre clarificaciones de los enunciados.

Problema 1: BiotSavart. ★★

Considere un cascarón cónico con densidad de carga superficial uniforme σ_0. Dicho cascarón rota con velocidad angular constante ω_0 en torno al eje de simetría del cono. El cono tiene lado R y ángulo θ_0 como se ve en la figura. Se pide calcular el campo magnético $\vec{B}$ en el vértice del cono. *Hint:* puede hacerlo directamente por integracion o considerando la acumulacion de muchos aros ubicados en el manto.



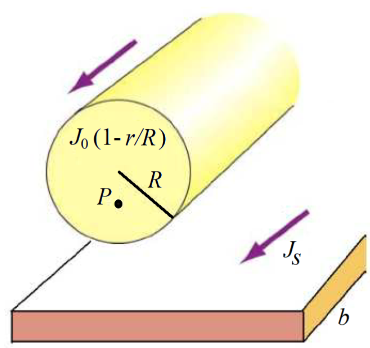
Problema 2: Ampere. ★★

Se tiene dos corrientes, ambas con igual sentido (en el dibujo, saliendo de la hoja). Una de ellas circula por un plano infinito (de espesor b) y tiene magnitud J_s. La otra circula por un cilindro infinito, cuya densidad de corriente es $J = J_0(1 - r/R)$. Si P es un punto ubicado a una distancia $R/2$ directamente debajo del eje del cilindro infinito, se pide:

a) **[2p]** Encuentre el campo magnetico en P debido a J_s.

b) **[2p]** Encuentre el campo magnetico en P debido a J.

c) **[2p]** Encuentre una relacion entre J_s y J_0 para que el campo magnetico total en P sea cero.



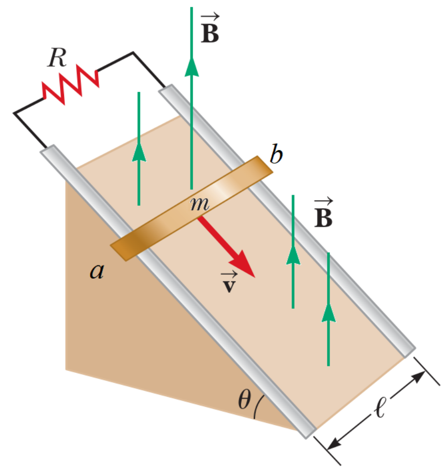
Problema 3: Faraday Lenz y fuerza sobre un circuito★★★

Una barra conductora de masa m desliza entre 2 rieles conductores, sin fricción. Los rieles forman un ángulo θ con la horizontal, están separados una distancia ℓ y unidos por una resistencia R. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ es aplicado verticalmente. La barra se suelta del reposo y desliza hacia abajo.

a) **[3p]** Determine la corriente que circula por la barra en funcion de la rapidez de la misma. Determine si fluye en el sentido $a \to b$ o $b \to a$.

b) **[2p]** Encuentre la fuerza neta sobre la barra.

c) **[1p]** Encuentre una ecuacion para la velocidad de la barra y determine la velocidad terminal de la misma.



Formulas útiles.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon} \quad ; \quad V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad ; \quad \vec{E} = -\nabla V \quad ; \quad \nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Leftrightarrow J_{1n} = J_{2n} \qquad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad ; \quad \vec{J} = \sigma_{cond} \vec{E} \Leftrightarrow V = RI$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int i\, d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \quad \text{donde} \quad i\, d\vec{\ell} \leftrightarrow \vec{K}\ dSup \leftrightarrow \vec{J}\ d\mathscr{V}o\ell \quad ; \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Leftrightarrow \oint_{\mathscr{C} = \partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc\ S}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad ; \quad d\vec{F} = i\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \quad ; \quad \Sigma \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad ; \quad \phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$d\vec{\ell} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z} \quad ; \quad d\vec{S} = dxdy\hat{z} + dydz\hat{x} + dxdz\hat{y} \quad ; \quad d\mathscr{V} = dxdydz$$

$$d\vec{\ell} = dr\hat{r} + dz\hat{z} + rd\theta\hat{\theta} \quad ; \quad d\vec{S} = drrd\theta\hat{z} + drdz\hat{\theta} + dzrd\theta\hat{r} \quad ; \quad d\mathscr{V} = drrd\theta dz$$

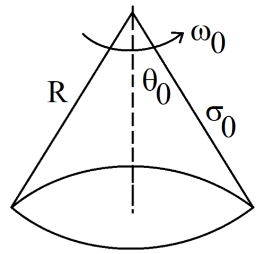
$$d\vec{\ell} = dr\hat{r} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi} + rd\theta\hat{\theta} \quad ; \quad d\vec{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi\hat{r} + r\sin\theta d\phi dr\hat{\theta} + rd\theta dr\hat{\phi} \quad ; \quad d\mathscr{V} = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad = \frac{1}{r}\frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}$$

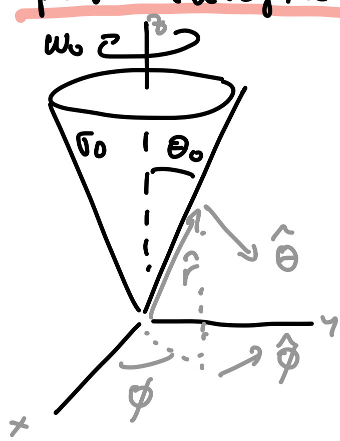
$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \qquad = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \qquad = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

Problema 1: BiotSavart. ★★

Considere un cascarón cónico con densidad de carga superficial uniforme σ_0. Dicho cascarón rota con velocidad angular constante ω_0 en torno al eje de simetría del cono. El cono tiene lado R y ángulo θ_0 como se ve en la figura. Se pide calcular el campo magnético $\vec{B}$ en el vértice del cono. *Hint:* puede hacerlo directamente por integracion o considerando la acumulacion de muchos aros ubicados en el manto.



Sol) por integración: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{K} \wedge \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, ds'$



en esféricas

$$\vec{K}(\vec{r}\,') = \sigma_0 v_T(-\hat{\phi}) = \sigma_0 r' \sin\theta_0 \omega_0 (-\hat{\phi})$$ (2.0)

$\vec{r} = \vec{0}$

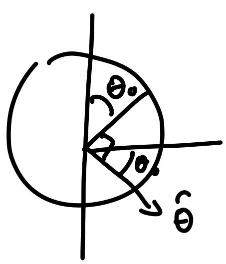
$r\theta\phi r\theta\phi$

$\vec{r}\,' = r'\hat{r}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} -\sigma_0 r' \sin\theta_0 \omega_0 \hat{\phi} \wedge \frac{(\vec{0} - r'\hat{r})}{|\vec{0} - r'\hat{r}|^3} r' \sin\theta_0 \, d\phi \, dr'$$ +(1.0)

+1.0

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 \sigma_0 \omega_0 \sin^2\theta_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{r'^3}{r'^3}\hat{\theta}\, d\phi\, dr' = \frac{\mu_0 \sigma_0 \omega_0 R \sin^2\theta_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\hat{\theta}\, d\phi$$

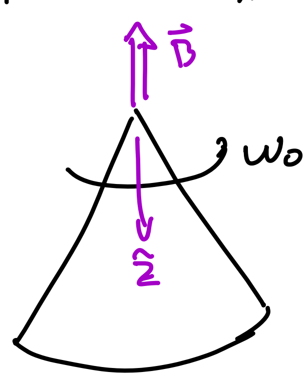


$$\hat{\theta} = -\sin\theta_0 \hat{z} + \cos\theta_0 \cos\phi \hat{x} + \cos\theta_0 \sin\phi \hat{y}$$

pero $\int_0^{2\pi}\cos\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi}\sin\phi\, d\phi = 0 \Rightarrow B_x = B_y = 0$

$$\vec{B}(\vec{0}) = B_z(0)\hat{z} = -\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega_0 R \sin^3\theta_0}{2}\hat{z}$$ (2.0)

OJO depende de mi sistema de referencia

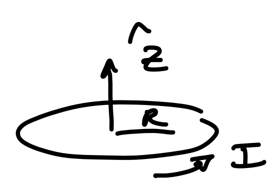


Por aros

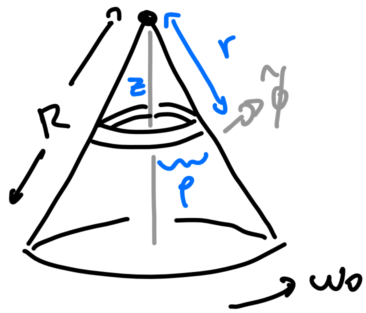
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2}\frac{I R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

1 anillo

(1.5)



dividimos cono en muchos anillos de dI



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\, dI\, \rho^2}{2(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$ 1.5

con z entre z y $R\cos\theta_0$

$$dI = \begin{pmatrix}\text{Toda la} \\ \text{corriente} \\ \text{que circula en} \\ \text{el aro}\end{pmatrix} dr \qquad r\in[0,R]$$

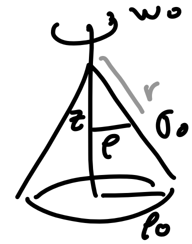
$$r^2 = z^2+\rho^2$$

$$z = r\cos\theta_0$$
$$\rho^2 = r^2 - z^2$$
$$= r^2(1-\cos^2\theta_0) = r^2\sin^2\theta_0$$

Toda la corriente: $I = \int \vec{K}\cdot dl\,\hat{n}$

$$\underbrace{\int \sigma_0 w_0 r\sin\theta_0\,\hat\phi\cdot dr\,\hat\phi}_{dI}$$ 2.0

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\int_0^R \frac{\sigma_0 w_0 r\sin\theta_0\, dr\; r^2\sin^2\theta_0\,\hat{z}}{r^3} = \frac{\mu_0\sigma_0 w_0\sin^3\theta_0\,\hat{z}\,R}{2}$$ 1.0



O en cilíndricas?

$\rho\,\theta\,z\;\rho\,\theta\,z$

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \sigma_0 r\sin\theta_0 w_0\,\hat\theta\wedge\left(\frac{-z\hat{z}-\rho\hat\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\right) dr\,\rho\, d\theta$$ 2.0 1.0

$$\rho = \tan\theta_0\, z \qquad r\sin\theta_0 = \rho$$
$$r^2 = z^2+\rho^2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma_0 w_0\sin\theta_0\int \overbrace{(-rz\hat{r}+r\rho\hat{z})}^{\vec{0}}\frac{dr\,\rho\, d\theta}{r^3}$$ 1.0

$$= \frac{\mu_0\sigma_0 w_0\sin\theta_0}{2}\int_0^R\frac{\rho^2 r\,dr}{r^3}\hat{z} = \frac{\mu_0\sigma_0 w_0\sin\theta_0}{2}\int_0^R\frac{r^2\sin^2\theta\, r\,dr}{r^3}\hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\sigma_0 w_0\sin^3\theta_0}{2} R\,\hat{z}\ \checkmark$$ 2.0

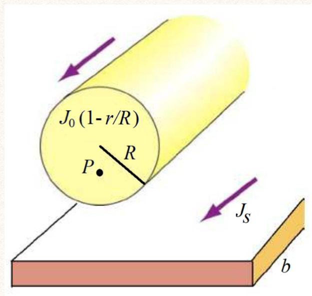
Problema 2: Ampere. ★★

Se tiene dos corrientes, ambas con igual sentido (en el dibujo, saliendo de la hoja). Una de ellas circula por un plano infinito (de espesor b) y tiene magnitud J_s. La otra circula por un cilindro infinito, cuya densidad de corriente es $J = J_0(1 - r/R)$. Si P es un punto ubicado a una distancia $R/2$ directamente debajo del eje del cilindro infinito, se pide:

a) **[2p]** Encuentre el campo magnetico en P debido a J_s.

b) **[2p]** Encuentre el campo magnetico en P debido a J.

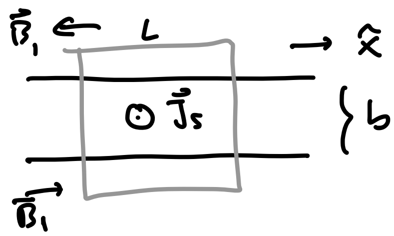
c) **[2p]** Encuentre una relacion entre J_s y J_0 para que el campo magnetico total en P sea cero.



<u>Sol</u> a) en P debido a $\vec{J}_s$: asumo $\vec{B}_1 = \pm B_1 \hat{x}$ 1.0

↑ cte x ser plano ∞

$\vec{B}_1$:

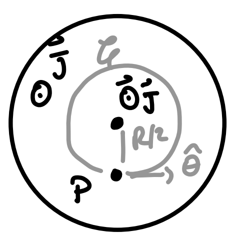


$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$\Rightarrow 2B_1 L + \underset{\vec{B}_1 \perp d\vec{l}}{0} = \mu_0 J_s L b \qquad B_1 = \frac{\mu_0 J_s b}{2}$$

$$\vec{B}_1(P) = -\frac{\mu_0 J_s b}{2}\hat{x}$$ 1.0

b) Para $\vec{B}_2(P)$:



x simetría $\vec{B}_2 = B_2(R/2)\,\hat{\theta}$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = 2\pi \frac{R}{2} B_2(R/2)$$

$\vec{B}_2$:

$$\oint_{\mathcal{C}=\partial S} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int J_0(1-r/R)\hat{z} \cdot r\,d\theta\,dr\,\hat{z} = \mu_0 2\pi J_0 \int_0^{R/2} (1-r/R)\,r\,dr$$

$$\Rightarrow 2\pi\frac{R}{2} B_2(R/2) = \mu_0 2\pi J_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{R}\frac{r^3}{3}\right]_0^{R/2} = \mu_0 2\pi J_0\left(\frac{R^2}{8} - \frac{1}{R}\frac{R^3}{3\cdot 8}\right)$$

$$\frac{R}{2} B_2(R/2) = \mu_0 J_0 \frac{R^2}{4}\frac{1}{3} \qquad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 J_0 R}{6}\hat{x} \quad \text{en P } \hat{\theta} \equiv \hat{x}$$ 2.0

c) $$\vec{B}_{TOT}(P) = \mu_0\left(-\frac{J_s b}{2} + \frac{J_0 R}{6}\right)\hat{x}; \quad \vec{B}_{TOT} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\frac{J_0 R^2}{3} = J_s b}$$ 2.0

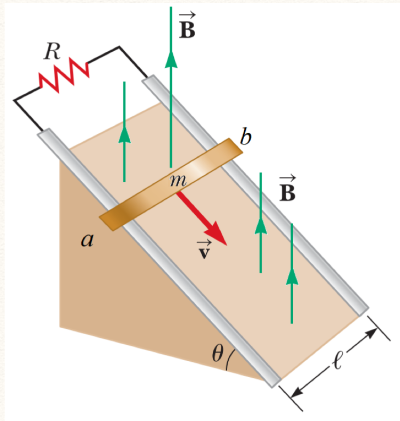
Problema 3: Faraday Lenz y fuerza sobre un circuito★★★

Una barra conductora de masa m desliza entre 2 rieles conductores, sin fricción. Los rieles forman un ángulo θ con la horizontal, están separados una distancia ℓ y unidos por una resistencia R. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ es aplicado verticalmente. La barra se suelta del reposo y desliza hacia abajo.

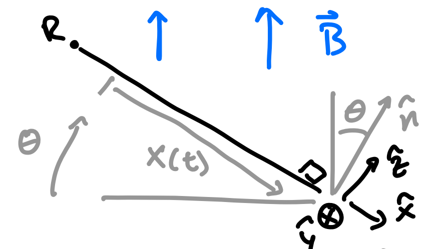
a) **[3p]** Determine la corriente que circula por la barra en funcion de la rapidez de la misma. Determine si fluye en el sentido $a \to b$ o $b \to a$.

b) **[2p]** Encuentre la fuerza neta sobre la barra.

c) **[1p]** Encuentre una ecuacion para la velocidad de la barra y determine la velocidad terminal de la misma.



sol) a) $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$



$\vec B = B_0 \hat b$

$\phi_m = \int \vec B \cdot d\vec s = B_0\, \ell\, x(t) \cos\theta$ (1.0) $\mathcal{E} = -B_0 \ell \cos\theta\, \dot x$ $I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B_0 \ell \cos\theta\, \dot x}{R}$ (1.0)

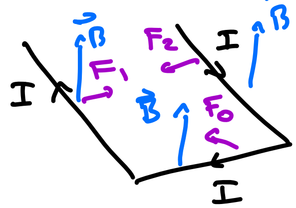
para compensar el aumento de flujo I vá de $b \to a$ (1.0)

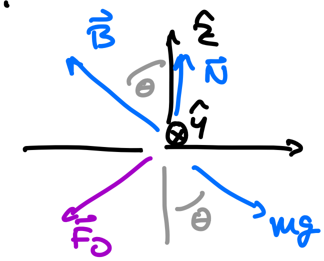
b) $i\, d\vec l = I\, dy\, (-\hat y)$ $\vec F_{mag} = \int i\, d\vec l \wedge \vec B = ?$

$\vec B = B_0 \cos\theta\, \hat z - B_0 \sin\theta\, \hat x$

$\vec F_g = -mg \cos\theta\, \hat z + mg \sin\theta\, \hat x$

$\vec F_1 = I \int_0^x dx\, \underbrace{(-\hat x) \wedge (B_z \hat z - B_x \hat x)}_{0}$





$\vec F_1 = I\, \hat y\, x\, B_0 \cos\theta$

$\vec F_2 = -I\, \hat y\, x\, B_0 \cos\theta$

$$\vec F_3 = I \int_0^\ell dy (-\hat y) \wedge (B_z \hat z - B_x \hat x)$$
$$= I\ell(-\hat x) B_z + I\ell (\hat z) B_x$$
$$= I\ell B_0 (-\cos\theta\, \hat x + \sin\theta\, \hat z)$$

$$\Sigma \vec F = \vec F_{neta} = -mg\cos\theta\, \hat z + mg \sin\theta\, \hat x + I x B_0 \cos\theta\, \hat y - I x B_0 \cos\theta\, \hat y$$
$$- I\ell B_0 \cos\theta\, \hat x + I\ell B_0 \sin\theta\, \hat z + N \hat z$$ (1.0)

la Normal en $\hat z$ compensa a las otras F_z's pero en $\hat x$ queda:

$mg \sin\theta - I\ell B_0 \cos\theta = F_x$

c) $\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ en $\hat{x}$: $mg\sin\theta - \ell B_0 \cos\theta \underbrace{I}_{\frac{B_0 \ell \cos\theta\, v_x}{R}} = m\dot{v}_x$

$$\boxed{g\sin\theta - \frac{\ell^2 B_0^2 \cos^2\theta}{m R} v_x = \dot{v}_x}$$

0.5

$v_y = 0 \quad v_z = 0$

Veloc terminal : $\dot{v}_x = 0$

$$\boxed{v_{xT} = \frac{mRg\sin\theta}{\ell^2 B_0^2 \cos^2\theta}}$$

0.5