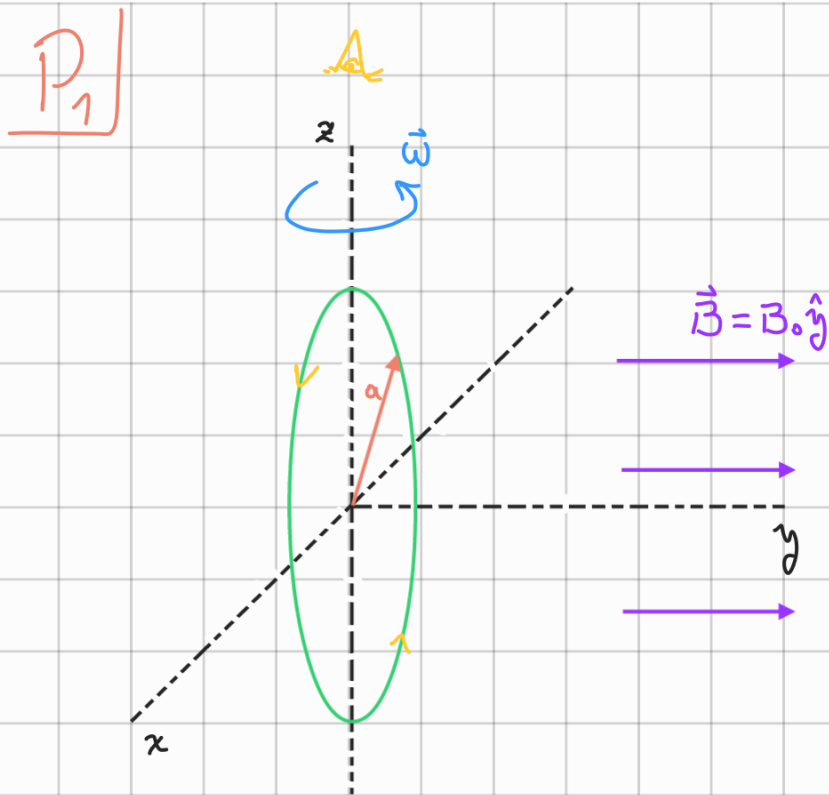
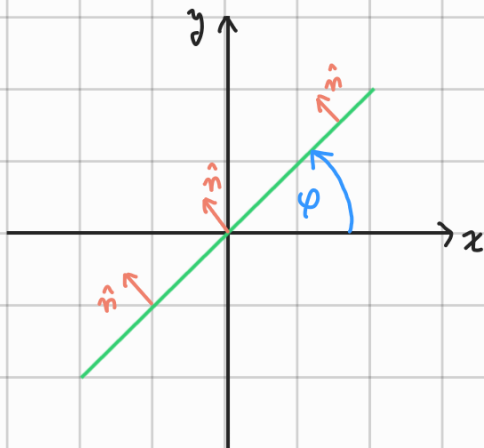




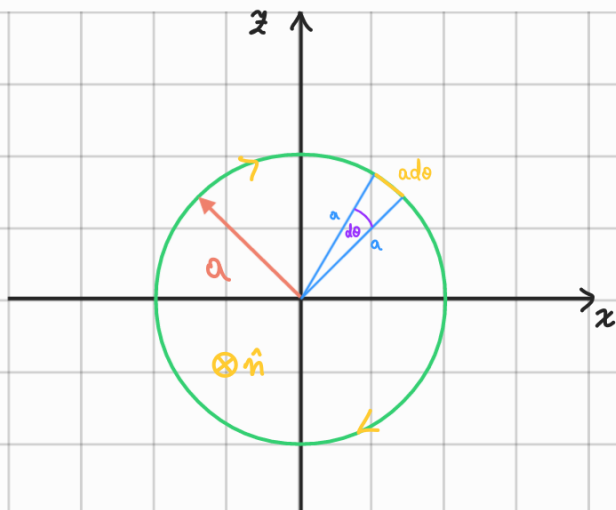
Mirando el sistema desde arriba ($\downarrow$) veríamos lo siguiente



$$\hat{n} = -\sin(\varphi) \hat{x} + \cos(\varphi) \hat{y}$$

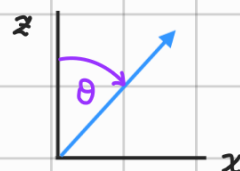
Aquí, el ángulo φ corresponde al ángulo de rotación de la espira.

Si ahora miramos el sistema de frente



Aquí usaremos una nueva coordenada, la cual llamaremos θ , para parametrizar la espira. Esta coordenada se mide desde el eje z

$$\hat{\theta} = \cos\theta \cos\varphi \hat{x} + \cos\theta \sin\varphi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}$$



a)

Para calcular la fem inducida, necesitamos conocer el flujo de campo magnético sobre la espira

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^a B_0 \hat{y} \cdot \hat{n} r dr d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} B_0 \int_0^{2\pi} \hat{y} \cdot (-\sin(\varphi) \hat{x} + \cos(\varphi) \hat{y}) d\theta \\ &= \frac{a^2 B_0}{2} 2\pi \cos\varphi\end{aligned}$$

$$\Phi = \pi a^2 B_0 \cos\varphi$$

Pero recordemos que la espira gira en torno al eje z con velocidad angular $\omega_z \hat{z}$, esto significa que el ángulo φ varía en el tiempo como $\varphi(t) = \omega_z t$

$$\Phi(t) = \pi a^2 B_0 \cos(\omega_0 t)$$

De esta manera la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\mathcal{E} = \omega_0 \pi a^2 B_0 \sin(\omega_0 t)$$

b)

$$V = IR$$

$$\mathcal{E} = IR$$

Como en este caso estamos considerando la fem autoinducida, la fem total será la que induce el campo magnético externo más la que induce el campo magnético que genera la espira misma, esto es

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ext} + \mathcal{E}_{aut.}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{ext}}{dt} - L \frac{dI}{dt}$$

Y por Ley de Ohm

$$\mathcal{E} = IR$$

$$\omega_0 \pi a^2 B_0 \sin(\omega_0 t) - L \frac{dI}{dt} = IR$$

$$\left[\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\omega_0 \pi a^2 B_0}{L} \sin(\omega_0 t) \right] \quad \text{EDO inhomogénea}$$

Buscamos solución homogénea y solución particular, la solución general será la suma de ambas

Solución homogénea

$$\frac{dI_h}{dt} + \frac{R}{L} I_h = 0$$

Ya hemos visto esta edo antes, y conocemos la solución

$$\left[I_h(t) = K e^{-\frac{R}{L}t} \right]$$

Solución particular

Para esto sirve cualquier cosa que resuelva la EDO

Ansatz (solución de prueba): $I_p = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$

Reemplazando en la EDO

$$A\omega_0 \cos(\omega_0 t) - B\omega_0 \sin(\omega_0 t) + \frac{R}{L} A \sin(\omega_0 t) + \frac{R}{L} B \cos(\omega_0 t) = \frac{\omega_0 \pi a^2 B_0}{L} \sin(\omega_0 t)$$

$$\cancel{A\omega_0 \cos(\omega_0 t)} + \frac{R}{L} \cancel{B \cos(\omega_0 t)} = 0 \longrightarrow A\omega_0 + \frac{R}{L} B = 0 \longrightarrow B = -\frac{L\omega_0}{R} A \quad \star$$

$$-\cancel{B\omega_0 \sin(\omega_0 t)} + \frac{R}{L} \cancel{A \sin(\omega_0 t)} = \frac{\omega_0 \pi a^2 B_0}{L} \cancel{\sin(\omega_0 t)} \longrightarrow -B\omega_0 + \frac{R}{L} A = \frac{\omega_0 \pi a^2 B_0}{L} \quad \star$$

Reemplazando $\star$ en $\star$

$$\frac{L\omega_0}{R} A\omega_0 + \frac{R}{L} A = \omega_0 \pi a^2 \frac{B_0}{L}$$

$$A \left(\frac{L\omega_0^2}{R} + \frac{R}{L} \right) = \omega_0 \pi a^2 \frac{B_0}{L}$$

$$A \left(\frac{L^2\omega_0^2 + R^2}{RL} \right) = \omega_0 \pi a^2 \frac{B_0}{L} \quad | \times RL$$

$$A(L^2\omega_0^2 + R^2) = RL\omega_0 \pi a^2 B_0$$

$$A = \frac{RL\omega_0 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \quad \star \Rightarrow B = \frac{-L\omega_0}{R} \frac{RL\omega_0 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2}$$

$$B = \frac{-L\omega_0^2 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2}$$

$$\therefore I_p(t) = \frac{RL\omega_0 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \sin(\omega_0 t) - \frac{L\omega_0^2 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \cos(\omega_0 t)$$

Solución general

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t)$$

$$I(t) = K e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{RL\omega_0 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \sin(\omega_0 t) - \frac{L\omega_0^2 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \cos(\omega_0 t)$$

Imponemos condición inicial para determinar K . Inicialmente la espira no gira, por tanto no hay corriente, ie:

$$I(t=0) = 0 = K - \frac{L\omega_0^2 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \Rightarrow K = \frac{L\omega_0^2 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2}$$

$\therefore$

$$I(t) = \frac{L\omega_0^2 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{RL\omega_0 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \sin(\omega_0 t) - \frac{L\omega_0^2 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \cos(\omega_0 t)$$

$$I(t) = \frac{\omega_0 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \left[L \omega_0 e^{-\frac{R}{L}t} + R \sin(\omega_0 t) - L \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right]$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\omega_0 \pi a^2 B_0}{L} \sin(\omega_0 t)$$

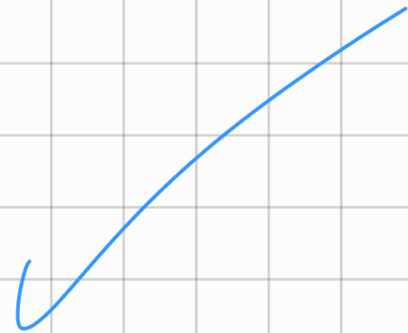
$$\cancel{\frac{R \omega_0^3 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \cos(\omega_0 t)} + \frac{L \omega_0^3 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \sin(\omega_0 t)$$

$$+ \frac{R}{L} \frac{R \omega_0 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \sin(\omega_0 t) - \cancel{\frac{R}{L} \frac{L \omega_0^3 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \cos(\omega_0 t)} = \frac{\omega_0 \pi a^2 B_0}{L} \sin(\omega_0 t)$$

$$\frac{L \omega_0^3 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} + \frac{R^2 \omega_0 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2 L}$$

$$= \omega_0 \pi a^2 B_0 \left(\frac{L \omega_0^2}{\omega_0^2 L^2 + R^2} + \frac{R^2}{\omega_0 L^2 + R^2 L} \right)$$

$$= \omega_0 \pi a^2 B_0 \left(\frac{L^2 \omega_0^2}{\omega_0^2 L^2 + R^2 L} + \frac{R^2}{\omega_0 L^2 + R^2 L} \right)$$



c)

$$\vec{\tau} = \oint_{\Gamma} \vec{r} \times (I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}))$$

$$\tau = \int_0^{2\pi} a \hat{\rho} \times (I a d\theta \hat{\theta} \times B_0 \hat{y})$$

$$= a^2 B_0 I \int_0^{2\pi} \hat{\rho} \times \hat{\theta} \times \hat{y} d\theta$$

$$= a^2 B_0 I \int_0^{2\pi} \hat{\rho} \times (\cos\theta \cos\varphi \hat{x} + \cos\theta \sin\varphi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}) \times \hat{y} d\theta$$

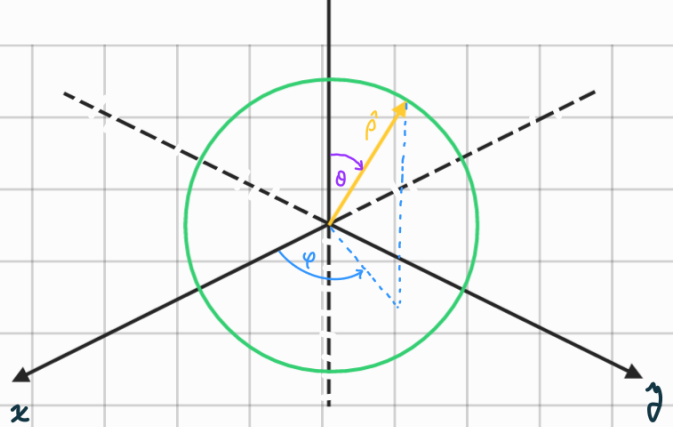
$$= a^2 B_0 I \int_0^{2\pi} \hat{\rho} \times (\cos\theta \cos\varphi \hat{z} + \sin\theta \hat{x}) d\theta$$

$$= a^2 B_0 I \int_0^{2\pi} (\sin\theta \cos\varphi \hat{x} + \sin\theta \sin\varphi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}) \times (\cos\theta \cos\varphi \hat{z} + \sin\theta \hat{x}) d\theta$$

$$= a^2 B_0 I \int_0^{2\pi} -\cancel{\sin\theta \cos\theta} \cos^2\varphi \hat{y} + \cancel{\sin\theta \cos\theta} \sin\varphi \cos\varphi \hat{x} - \sin^2\theta \sin\varphi \hat{z} + \cancel{\sin\theta \cos\theta} \hat{y} d\theta$$

$$= -a^2 B_0 I \sin\varphi \hat{z} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta$$

$$= -a^2 B_0 I \sin(\omega_0 t) \hat{z} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2\pi)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi}$$



$$\hat{\rho} = \sin\theta \cos\varphi \hat{x} + \sin\theta \sin\varphi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

$$= -a^2 B_0 I \sin(\omega_0 t) \hat{z} \frac{2\pi}{2}$$

$$= -\pi a^2 B_0 I \sin(\omega_0 t) \hat{z}$$

$$= -\pi a^2 B_0 \sin(\omega_0 t) I \hat{z}$$

$$\vec{\tau} = -\pi a^2 B_0 \sin(\omega_0 t) \left\{ \frac{\omega_0 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \left[L \omega_0 e^{-\frac{R}{L}t} + R \sin(\omega_0 t) - L \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right] \right\} \hat{z}$$

Si la espira ha estado girando un tiempo muy largo, eso significa que $e^{-\frac{R}{L}t} \approx 0$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = -\pi a^2 B_0 \sin(\omega_0 t) \left\{ \frac{\omega_0 \pi a^2 B_0}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \left[R \sin(\omega_0 t) - L \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right] \right\} \hat{z}$$

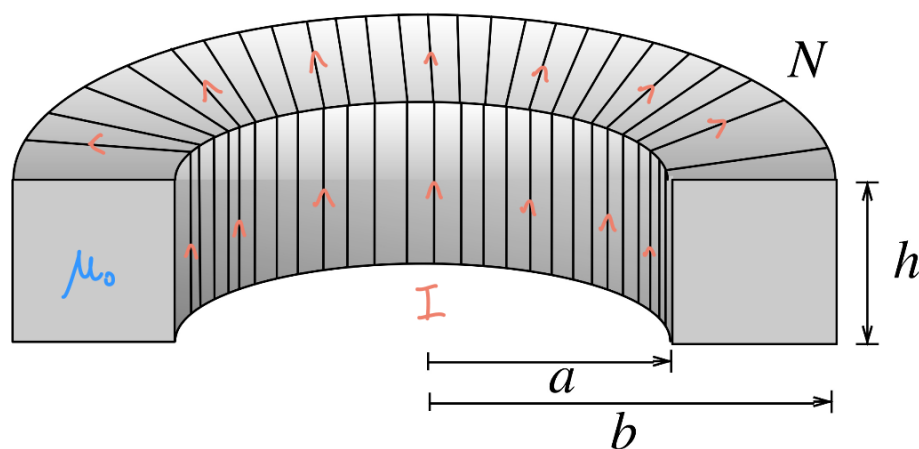
$$\vec{\tau} = \frac{-\omega_0 \pi^2 a^4 B_0^2}{\omega_0^2 L^2 + R^2} \left[R \sin(\omega_0 t) - L \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right] \sin(\omega_0 t) \hat{z}$$

P_2

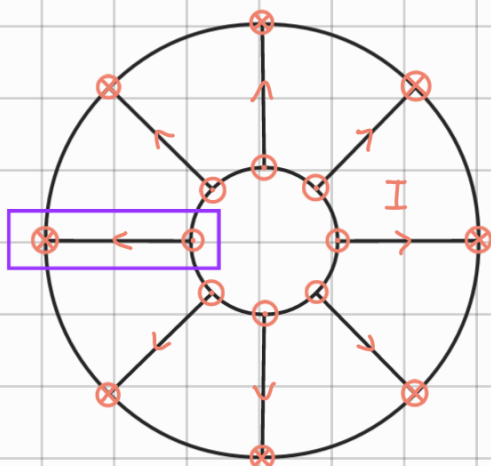
a)

Para conocer la autoinductancia del toroide, es necesario conocer el flujo del campo magnético, y para conocer este, es

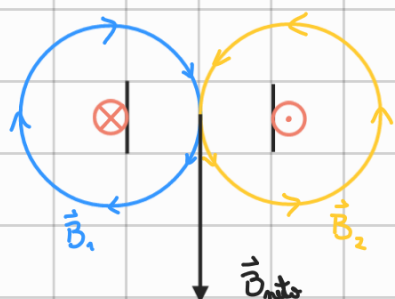
necesario saber el campo magnético, así que vamos a calcularlo mediante Ley de Ampère.



Vamos a suponer que por el alambre circula una corriente I . Si ahora miramos el toroide desde arriba veríamos lo siguiente

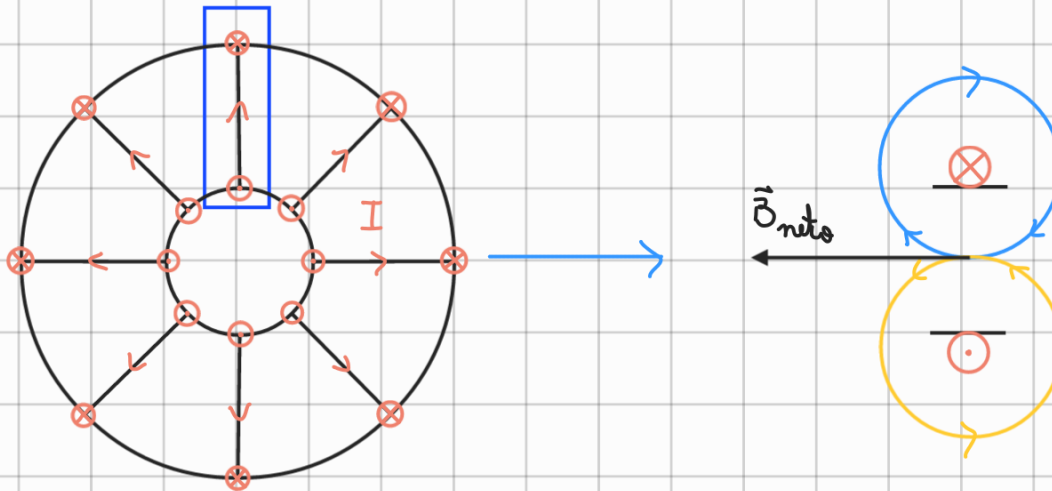


Ahora pensemos únicamente en la sección encerrada en morado, aquí tendremos lo siguiente

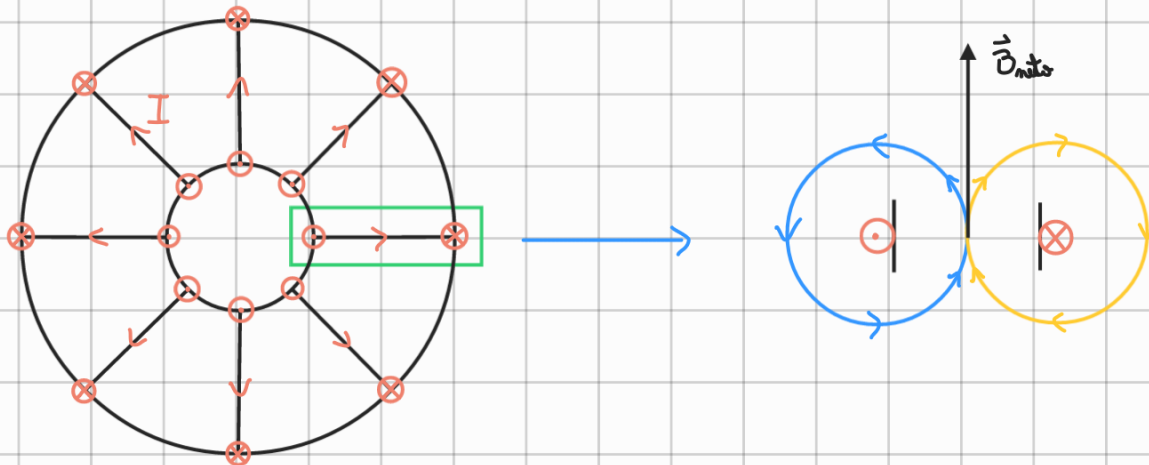


Notemos que en punto medio entre las corrientes que salen y entran a la pantalla, el campo magnético de ambas corrientes apunta hacia arriba, de modo que el campo neto apuntará en el mismo sentido.

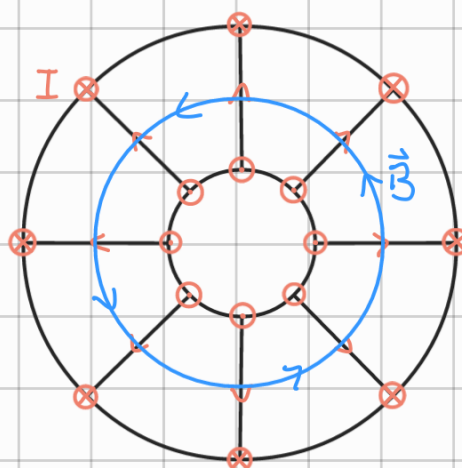
Y este comportamiento se repetirá para cada sección que elijamos del toroide, por ejemplo, si ahora elejiésemos la sección encerrada en azul



O la encerrada en verde

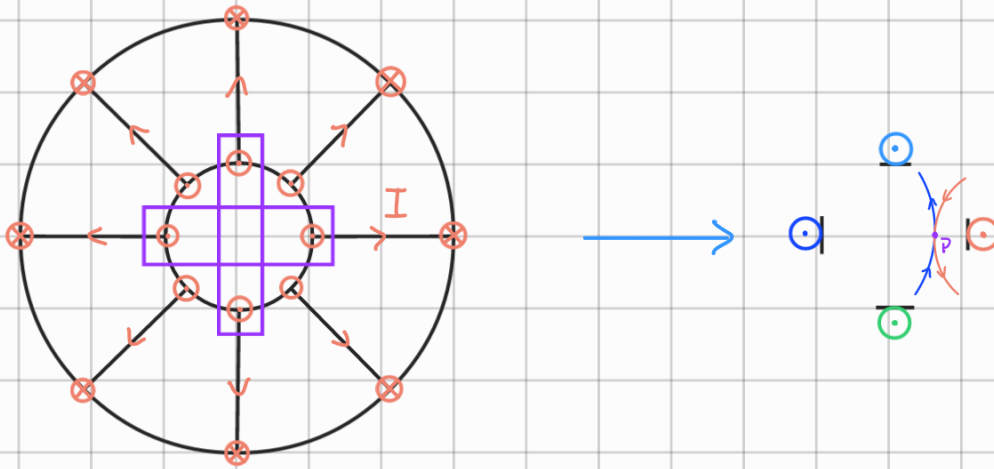


A partir de esto se puede notar que el campo magnético al interior se envuelve en el mismo sentido que el toroide, o sea que se ve como

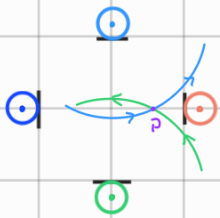


Esto es
 $\vec{B} = B(r) \hat{\varphi}$

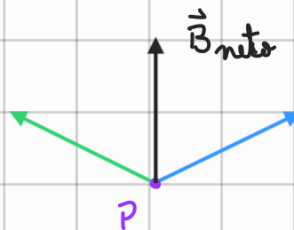
Ahora veamos lo que pasa en el centro del toroide



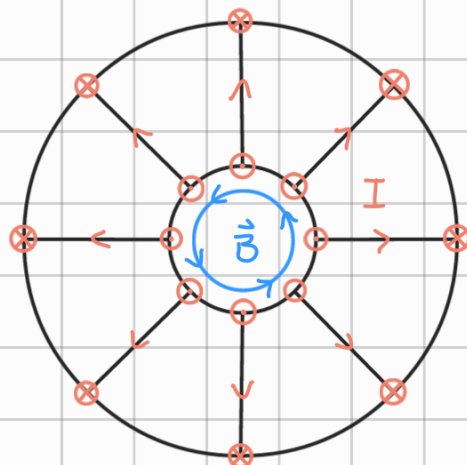
Notemos que sobre el punto P , las corrientes que van por los lados solo tiene aportes verticales (que en principio no se cancelan, pero lo importante es que son verticales).
 Ahora para las corrientes que van por arriba y por abajo



Ahora los campos justo en el punto P son



De esta forma vemos que el campo neto en dicho punto también es solo vertical. Y esto se cumplirá para cualquier punto en el centro, si ahora giran su cabeza (o la pantalla) podrán ver que el campo en el centro del toroide también se envuelve en el mismo sentido del toroide, paralelo a su paredes, o sea



Nuevamente
 $\vec{B} = B(r) \hat{\phi}$

Mediante un argumento similar se puede concluir que el campo para el exterior del toro sigue la misma forma, es decir

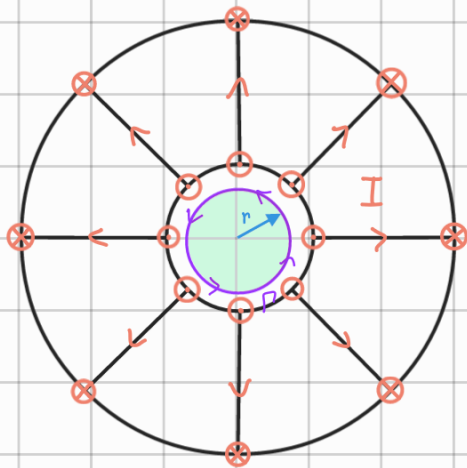
$$\vec{B} = B(r) \hat{\varphi} \quad \text{en todo el espacio.}$$

(si prefiere un argumento más formal, puede ver las páginas 238 y 239 del Griffiths 4ta edición).

Ahora podemos calcular el campo magnético mediante la Ley de Ampère.

Para esto, usaremos un camino que siga la misma orientación que el campo magnético, de modo que usaremos un círculo. Y similar a cuando usábamos la Ley de Gauss, resolveremos por zonas

$$r < a$$



Aplicamos la Ley de Ampère sobre este camino cerrado Γ

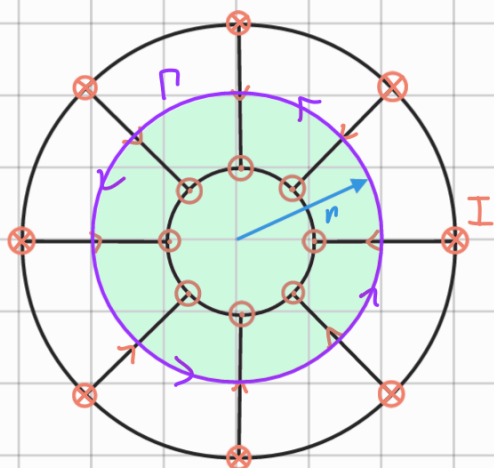
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{ent.}}$$

Notemos que para este camino no hay corriente enlazada, o bien, no hay corriente que atraviese a la superficie que encierra nuestro camino, entonces

$$\int_0^{2\pi} -B(r) \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} r d\varphi = 0$$

$$B(r) r \int_0^{2\pi} d\varphi = 0 \Rightarrow B(r) r 2\pi = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} = 0} \quad r < a$$

$$r \in (a, b)$$



Ahora, tenemos que sí hay corriente enlazada, o corriente que atraviesa la superficie encerrada por el camino, la corriente que sale de la hoja. Además sabemos que el toro tiene un cable enrollado que da N vueltas a su alrededor, y este cable porta una corriente I , de modo que la corriente enlazada será $N I$

Así

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 N I$$

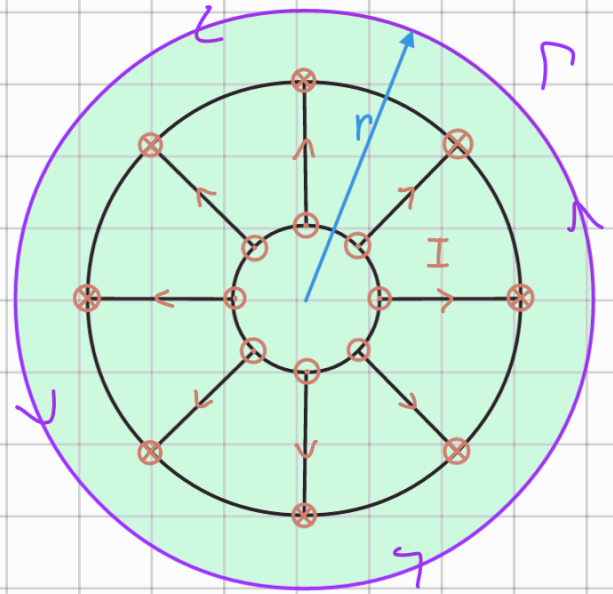
$$\int_0^{2\pi} B(r) \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} \, r d\varphi = \mu_0 N I$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 N I$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \hat{\varphi} \quad r \in (a, b)$$

$$r > b$$

Para este último caso, tenemos que nuestro camino enlaza tanto la corriente que sale como la que entra en la hoja. Sin embargo, notemos que nosotros orientamos nuestro en sentido anti-horario, de manera que la normal a la superficie sale de la hoja, esto



significa que las corrientes que entran a la hoja realizan un aporte negativo a la corriente enlazada, pues fluyen en el sentido opuesto a la normal, y como solo tenemos un único cable enrollado alrededor del toro, habrán N aportes positivos, y N aportes negativos, de modo que la corriente enlazada total es 0. De esta manera

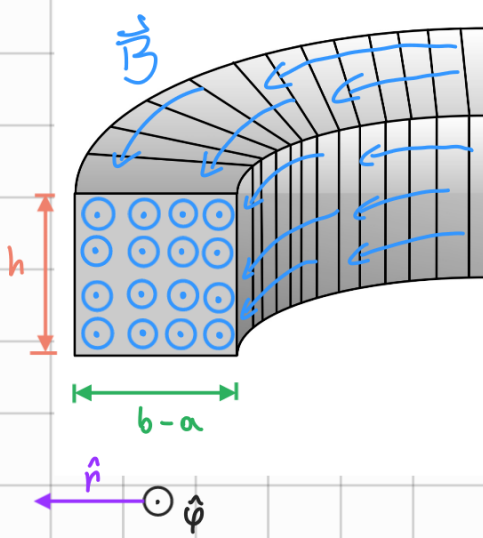
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} B(r) \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} r d\phi = 0$$

$$2\pi r B(r) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} = 0} \quad r > b$$

Conociendo $\vec{B}$, podemos calcular el flujo de campo magnético que atraviesa a la espiras

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



Veamos que la superficie que atraviesa **B** corresponde a una "cara" del toroide. Orientando la superficie en el mismo sentido que la dirección de **B**, y al ser esta superficie un cuadrado, tendremos que el diferencial de superficie será

$$d\vec{S} = dr dz \hat{\phi}$$

Y dado que el cuadrado tiene altura h y ancho $b - a$

$$\Phi = \int_{-h/2}^{h/2} \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \underbrace{\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}}_1 dr dz = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \int_a^b \frac{1}{r} dr dz = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln(b/a)$$

Finalmente, podemos calcular la autoinductancia como

$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

$$L = \frac{N}{I} \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln(b/a)$$

$$L = \frac{\mu_0 h N^2}{2\pi} \ln(b/a)$$

b)

Recordemos que por Taylor

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\text{Si } |x| \ll 1 \Rightarrow \ln(x+1) \approx x \quad \star$$

$$\text{Nos dicen que } b-a \ll a \Rightarrow \frac{b-a}{a} \ll 1$$

$$\ln(b/a) = \ln\left(\frac{b-a+a}{a}\right) = \ln\left(\frac{b-a}{a} + \frac{a}{a}\right) = \ln\left(\frac{b-a}{a} + 1\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 h N^2}{2\pi} \ln\left(\frac{b-a}{a} + 1\right)$$

Usando $\star$

$$L \approx \frac{\mu_0 h N^2 (b-a)}{2\pi a}$$

c)

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int |\vec{B}|^2 dV$$

Todo el espacio.

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \hat{\varphi} & r \in (a, b) \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a 0 \, r \, dr \, d\varphi \, dz + \frac{1}{2\mu_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi^2 r^2} r \, dr \, d\varphi \, dz + \frac{1}{2\mu_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_b^\infty 0 \, r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} \, dr \, d\varphi \, dz = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi^2} 2\pi h \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$U = \frac{\mu_0 h N^2 I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

A partir de la inductancia podemos usar

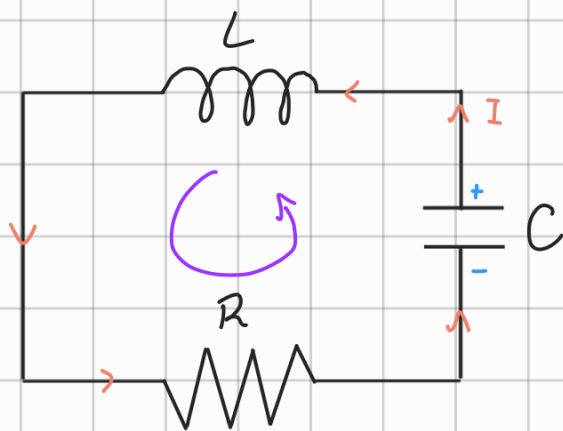
$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 h N^2}{2\pi} \ln(b/a) I^2$$

$$U = \frac{\mu_0 h N^2 I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ambos resultados coinciden.

P₃



$$C = \frac{Q}{V_c}$$

$$V_L = -L\dot{I}$$

$$V_R = IR$$

Aplicando LVK sobre el circuito

$$V_c + V_L - V_R = 0$$

$$\frac{Q}{C} - L\dot{I} - IR = 0$$

En este caso, tanto el condensador como la inductancia actúan como baterías, por lo que a su suma le restamos V_R .

Otra forma de pensarlo es que el voltaje total en el circuito es el voltaje del condensador más la fem de la inductancia, considerando esto, se puede aplicar directamente la Ley de Ohm, y se llega a lo mismo que ya tenemos.

Dado que la corriente sale del condensador $I = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow \dot{I} = -\ddot{Q}$

$$\therefore \frac{Q}{C} - L\dot{I} + \frac{dQ}{dt}R = 0$$

$$\frac{Q}{C} + L\ddot{Q} + \dot{Q}R = 0$$

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$$



Resolver esta EDO es un auténtico dolor de cabeza y escapa un poco al objetivo del curso. Si recuerdan mecánica, esta

ecuación corresponde al de un movimiento armónico amortiguado, cuya solución "general" es la siguiente

$$Q(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t) + B e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

Donde $\gamma \equiv \frac{R}{2L}$ y $\omega \equiv \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

De esta manera, la corriente es

$$\frac{dQ}{dt} = A \left[-\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega t) - \omega e^{-\gamma t} \sin(\omega t) \right] + B \left[-\gamma e^{-\gamma t} \sin(\omega t) + \omega e^{-\gamma t} \cos(\omega t) \right]$$

$$I(t) = \left\{ -A \left[\gamma \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right] + B \left[\omega \cos(\omega t) - \gamma \sin(\omega t) \right] \right\} e^{-\gamma t}$$

Imponiendo condiciones iniciales

$$Q(t=0) = Q_0 = A$$

$$\dot{Q}(t=0) = 0 = -A\gamma + B\omega \Rightarrow B = \frac{Q_0\gamma}{\omega}$$

$\therefore$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t) + \frac{Q_0\gamma}{\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

$$I(t) = \left\{ \frac{Q_0\gamma}{\omega} e^{-\gamma t} \left[\omega \cos(\omega t) - \gamma \sin(\omega t) \right] - Q_0 \left[\gamma \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right] \right\} e^{-\gamma t}$$

La corriente oscilará en el circuito al mismo tiempo que se irá disipando en la resistencia. Para tiempos grandes, no habrá corriente en el circuito ni carga en el condensador.

b)

Si no hubiese resistencia en el circuito, nuestra EDO original se transforma en la siguiente

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

Esta ecuación corresponde a un oscilador armónico simple, lo que indica que en ausencia de resistencia, la carga y corriente oscilarán indefinidamente dentro del circuito.

P_4

Que el interruptor del circuito se haya encontrado abierto durante un tiempo muy largo significa que ya no existe corriente fluyendo por este. Si había corriente en un principio, toda esta ya fue "disipada" por las resistencias (vean el problema anterior).

a)

Dado que la corriente en el circuito justo antes de ser conectado es 0, la corriente que pase por la inductancia al instante después de haber sido cerrado seguirá siendo 0. Esto es consecuencia de que la fem producida por una inductancia tiene la siguiente forma

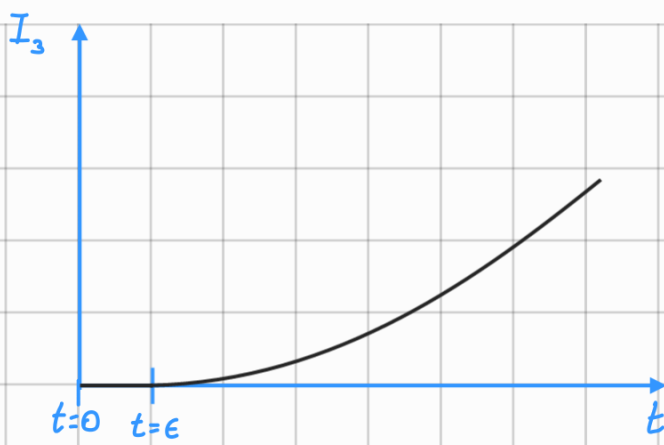
$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

Si la corriente en la inductancia sufriera un cambio abrupto al momento de ser conectada, esto implicaría que la derivada de arriba diverge (se hace infinita), lo que implica una fem (voltaje) "infinita", y esto es algo que no tiene sentido **físico**, pues conlleva cosas como fuerzas y energía infinitas. Gráficamente tendríamos esto



ϵ infinitesimalmente pequeño.

Salto discontinuo de la corriente, esto es algo que carece de sentido físico, por lo que no puede ocurrir.

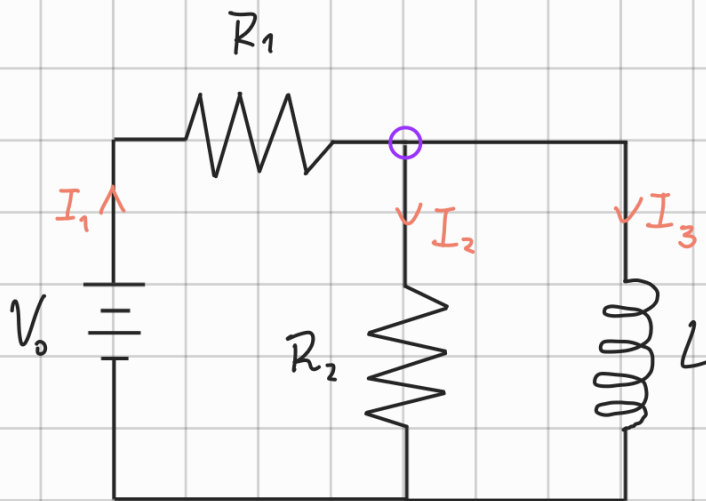


La corriente varía de forma continua y "suave" (diferenciable). Esto sí posee sentido físico.

De esta manera se puede concluir que

$$I_3 = 0$$

Y aplicando LCK en el nodo del dibujo

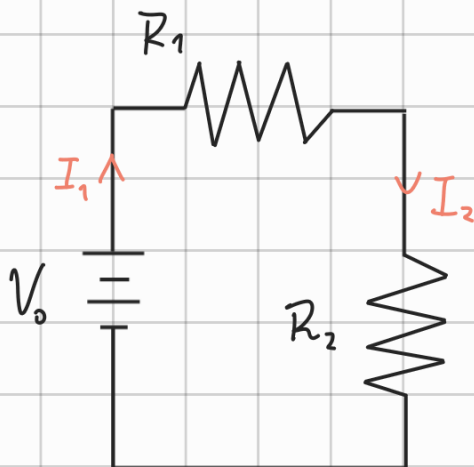


$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$\text{Pero } I_3 = 0$$

$$\therefore I_1 = I_2$$

Y como en el instante inicial I_3 es 0, esto es efectivamente igual a que si el lado derecho del circuito no existiese, de modo que tendríamos



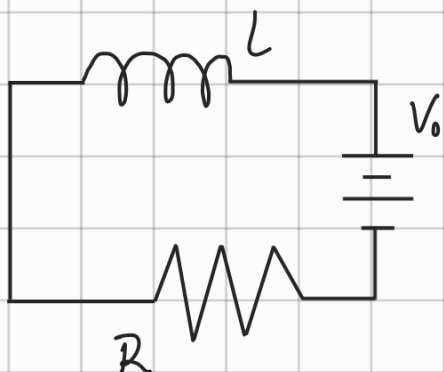
De aquí se puede ver que la resistencia equivalente del circuito es $R_1 + R_2$, y aplicando la Ley de Ohm se llega a

$$I_1 = I_2 = \frac{V_0}{R_1 + R_2}$$

b)

Cuando una inductancia ha estado conectada por mucho tiempo, sus efectos dejan de ser notorios y esta se vuelve indistinguible de un cable sin resistencia, o sea, un cortocircuito.

Si recuerdan de cátedra, un circuito RL como el del dibujo tiene la siguiente solución

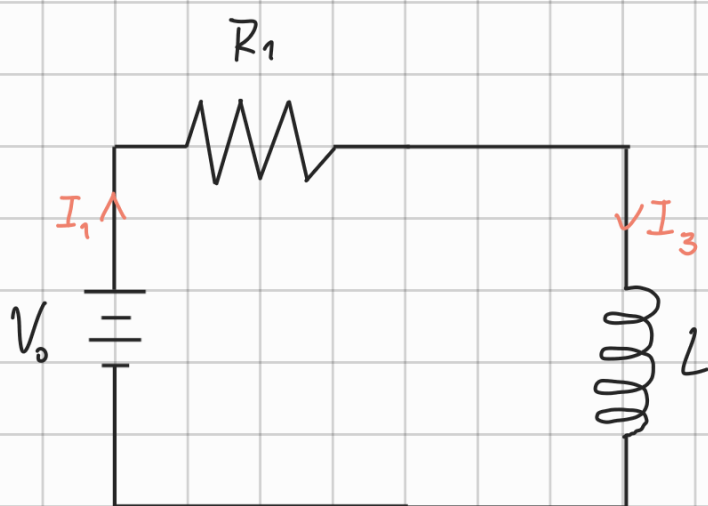


$$I(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) + I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Con I_0 la corriente inicial.

Debido a los términos exponenciales, se puede ver que para un t muy grande los efectos de la inductancia desaparecen y la corriente en el circuito fluye como si esta no existiera.

Para nuestro circuito tendremos el mismo comportamiento (no exactamente igual, pero cualitativamente es indistinto), esto significa que para un tiempo grande, la inductancia actuará como como un cable sin resistencia, y dado que la corriente siempre elige el camino de menor resistencia, toda esta fluirá por la inductancia, ignorando por completo la resistencia R_1 . De esta forma, nuestro circuito será solo esto

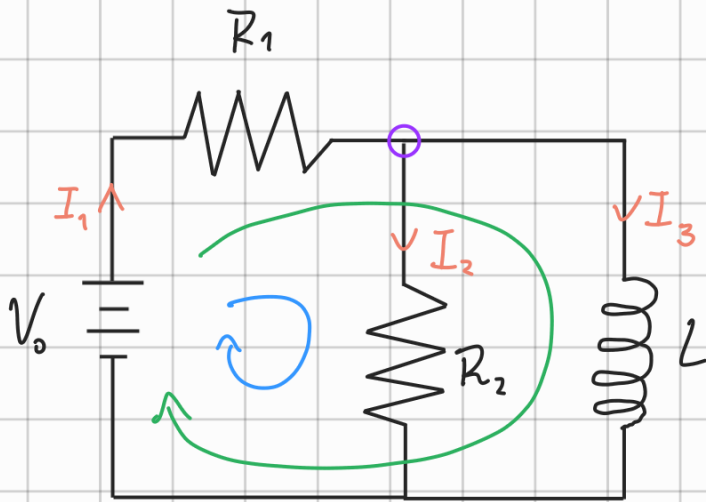


$$\therefore I_2 = 0$$

$$I_1 = I_3 = \frac{V_0}{R}$$

Si no me creen, matraqueemos...

Por simplicidad asumiremos que $R_1 = R_2 = R$ (esto es solo para simplificar el álgebra)



$$\text{LCK: } I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$\text{LVK: } V_0 = I_1 R + I_2 R \quad (2)$$

$$V_0 - L \dot{I}_3 = I_1 R \quad (3)$$

$$(1) \text{ en } (2): V_0 = I_2 R + I_3 R + I_2 R$$

$$V_0 = 2I_2 R + I_3 R \Rightarrow I_2 = \frac{V_0 - I_3 R}{2R} \quad (4)$$

$$(1) \text{ en } (3): V_0 - L \dot{I}_3 = I_2 R + I_3 R$$

$$(4) \Rightarrow V_0 - L \dot{I}_3 = \frac{V_0 - I_3 R}{2R} R + I_3 R$$

$$V_0 - L \dot{I}_3 = \frac{V_0}{2} - \frac{I_3 R}{2} + I_3 R$$

$$V_0 - \frac{V_0}{2} - L \dot{I}_3 = I_3 R - \frac{I_3 R}{2}$$

$$\frac{V_0}{2} - L \dot{I}_3 = \frac{R}{2} I_3$$

$$\dot{I}_3 + \frac{R}{2L} I_3 = \frac{V_0}{2L}$$

Buscamos solución particular y homogénea

$$\dot{I}_3^{(h)} + \frac{R}{2L} I_3^{(h)} = 0$$

Ya hemos resuelto esta EDO antes y sabemos que la solución es

$$I_3^{(h)}(t) = K e^{-\frac{R}{2L}t}$$

Para la solución particular nos sirve tomar $I_3^{(p)} = \frac{V_0}{R}$

Pueden verificar que esto funciona reemplazando en la EDO.

$$\therefore I_3(t) = K e^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{V_0}{R}$$

Imponemos condición inicial

$$I_3(t=0) = 0 = K + \frac{V_0}{R} \Rightarrow K = -\frac{V_0}{R}$$

$$\therefore I_3(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{2L}t})$$

Para $t=0$

$$I_3(0) = 0 \Rightarrow I_1 = I_2$$

$$(2) \Rightarrow V_0 = 2IR \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{V_0}{2R} \quad \text{(visto xd)}$$

Recuperamos el resultado anterior.

$$I_3(t \rightarrow \infty) = \frac{V_0}{R}$$

$$(4) \Rightarrow I_2 = \frac{V_0 - \frac{V_0}{R}R}{2R} = 0 \Rightarrow I_1 = I_3 = \frac{V_0}{R}$$

Volvemos a recuperar los resultados previos.