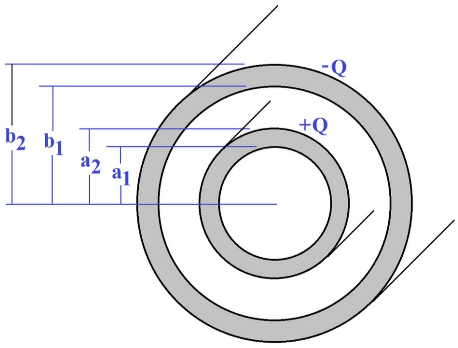
Problema 1: Conductores y C. ★★

Considere dos mantos cilíndricos coaxiales conductores de grosor finito en el vacío. El cilindro interno tiene radios $a_1 < a_2$, mientras que el cilindro externo tiene radios $b_1 < b_2$ (ver figura). Ambos cilindros tienen un largo $L \gg b_2$. El cilindro mayor tiene carga $-Q$ mientras que el cilindro interno tiene carga $+Q$. Ignore los efectos de borde.

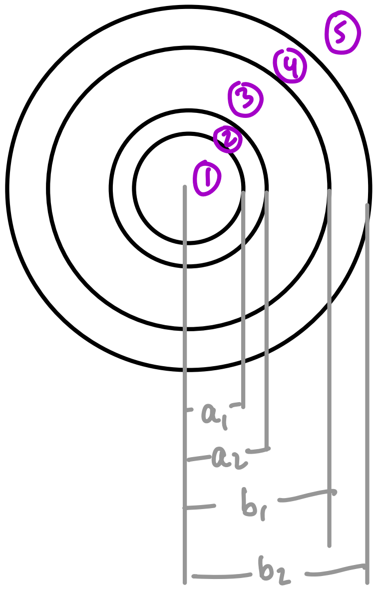
a) **[3p]** Calcule el campo eléctrico en todo el espacio, y las densidades de carga libre en todas las superficies.

b) **[2p]** Calcule la capacitancia del sistema.

c) **[1p]** Si el espacio entre los cilindros se llena con un dieléctrico de constante ε, calcule la capacitancia del sistema.



SOL1



a) para ② y ④ por electrostática de conductores $\vec{E}_{2} = \vec{E}_{4} = \vec{0}$

0.5

Por simetría del problema

$$\vec{E} = E_r(r, \cancel{\phi}, \cancel{z})\,\hat{r}$$

↳ ignorando efectos de borde.-

Usamos Gauss con superficies Gaussianas cilíndricas de largo l y radio r apropiado para ①-⑤

Por la geometría del campo: $$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\substack{\text{TAPAS} \\ \underbrace{d\vec{S} \perp \vec{E}}_{0}}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\substack{\text{MANTO} \\ E\,2\pi r l}}$$

Para ①: $$\oint_{SdG} \vec{E}_{1}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{0}$$

0.5

Para ②:

$$\frac{l\, 2\pi a_1 \sigma_{a1}}{\varepsilon_0} = \underbrace{\oint \vec{E}_2\cdot d\vec{S}}_{0} \quad (\vec{E}_2 = \vec{0})$$

$$\Rightarrow \sigma_{a1} = 0,$$

0.2

Para ③ :

dado que está cargado:

$$2\pi a_1 L \cancel{\sigma_{a1}} + 2\pi a_2 L \sigma_{a2} = +Q$$

$$\cancel{\sigma_{a1}} \to 0$$

$$\boxed{\sigma_{a2} = \frac{Q}{2\pi a_2 L}}$$ 0.3

$$\underbrace{\oint \vec{E}_3 \cdot d\vec{S}} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi a_2 \ell \sigma_{a2}}{\varepsilon_0}$$

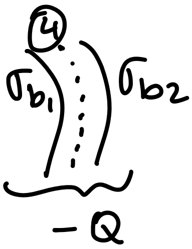
$$E_3(r)\, \cancel{2\pi} r \cancel{\ell} = \frac{\cancel{2\pi} a_2 \cancel{\ell} \sigma_{a2}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{a_2 \sigma_{a2}}{r \varepsilon_0} \hat{r}$$

$a_2 < r < b_1$

$$a_2 \sigma_{a2} = \frac{Q}{2\pi L}$$

$$\boxed{\vec{E}_3 = \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r}}$$ 0.5

para ④



$$\oint \vec{E}_{④} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{a2} 2\pi a_2 \ell + \sigma_{b1} 2\pi b_1 \ell}{\varepsilon_0}$$

pero $\vec{E}_{④} = \vec{0} \Rightarrow 0 = \sigma_{a2} \cancel{2\pi} a_2 \cancel{\ell} + \sigma_{b1} \cancel{2\pi} b_1 \cancel{\ell}$

$$\boxed{\sigma_{b1} = -\frac{a_2}{b_1} \sigma_{a2} = \frac{-Q}{2\pi L b_1} = \sigma_{b1}}$$

ahora el cilindro exterior tiene carga $-Q$

$$\Rightarrow \underbrace{2\pi b_1 \sigma_{b1} L}_{-Q} + 2\pi b_2 \sigma_{b2} L = -Q$$

$$-Q + 2\pi b_2 \sigma_{b2} L = -Q$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{b2} = 0}$$ 0.5

para ⑤

$$\oint \vec{E}_{⑤} \cdot d\vec{S} = Q_{enc}/\varepsilon_0 = 0 \leftarrow +Q - Q$$

$$2\pi r \ell E_5 = 0 \qquad \boxed{\vec{E}_5 = \vec{0}}$$ 0.5

$r > b_2$

b]

$$V_{a2} - V_{b1} = -\int_{a_2}^{b_1} \vec{E}_{③} \cdot \underbrace{d\vec{\ell}}_{\hat{r}\, dr} = -\frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \int_{a_2}^{b_1} \frac{\hat{r}}{r} \cdot \hat{r}\, dr$$

$$\Delta V = -\frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln(b_1/a_2)$$ 1.0

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln(b_1/a_2)} = \varepsilon_0 \frac{2\pi L}{\ln(b_1/a_2)}$$

1.0

c)

$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$

$$C = \varepsilon \frac{2\pi L}{\ln(b_1/a_2)}$$

1.0

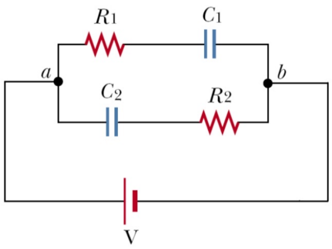
Problema 2: Circuito RC. ★★

Para el circuito de la figura se pide.

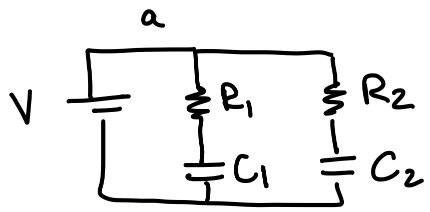
a) **[1p]** Si la carga inicial de ambos condensadores es nula, determine la corriente en cada resistencia en dicho instante.

b) **[1p]** Determine la diferencia de potencial en cada resistencia si la fuente ha estado conectada mucho tiempo.

c) **[4p]** encuentre la carga en ambos condensadores, para cualquier instante de tiempo $t > 0$.



Sol]



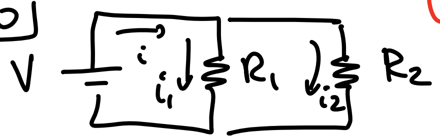
$C = \frac{Q}{V}$

a] Si $Q_1(0) = 0$ y $Q_2(0) = 0$ $\Rightarrow$ $V_{C_1}(0) = C_1 Q_1(0) = 0$

$V_{C_2}(0) = 0$

0.5

en $t=0$]



$\left.\begin{array}{l} V - V_{R_1} = 0 \\ V - V_{R_2} = 0 \end{array}\right\} \quad V = V_{R_1}(0) = V_{R_2}(0)$

y $V_{R_1}(0) = V_{R_2}(0) = i_1(0) R_1 = i_2(0) R_2 = V$

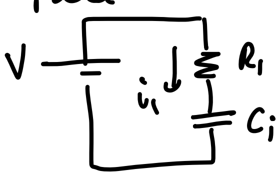
$i_1(0) = \frac{V}{R_1}$ $\quad i_2(0) = \frac{V}{R_2}$

0.5

b] Si la fuente ha estado mucho tiempo $\Rightarrow$ $\dot{Q}_1(t) = \dot{Q}_2(t) = 0$ 0.5

$\Rightarrow$ $i_1(t \to \infty) = i_2(t \to \infty) = 0$ $\Rightarrow$ $V_{R_1}, V_{R_2} \to 0$ // 0.5

c] para cada R, C :



1.0

$i_1(t) = i_1(0)\, e^{-t/R_1C_1}$ 1.0

$i_1(t) = \frac{V}{R_1} e^{-t/R_1C_1}$ 1.0

idem para $i_2(t) = \frac{V}{R_2} e^{-t/R_2C_2}$ // 1.0

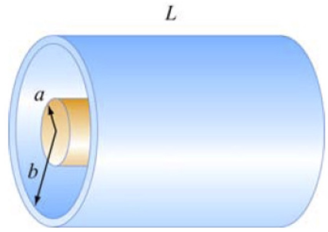
Problema 3: Corrientes y ley de ohm ★★

Dos cilindros coaxiales (radios a y b) de largo $L \gg b$, están separados por un material de conducividad $\sigma(r) = k\, r$ donde k es una constane arbitraria y r la distancia al eje (común) de los cilindros. Ignore efectos de borde.

a) **[3p]** Asuma que I es la corriente total que circula entre el cilindro interior y el exterior. Encuentre la densidad de corriente entre ambos cilindros. *Hint:* Recuerde que una corriente estacionaria I tiene el mismo valor para cualquier superficie cilíndrica que envuelva el cilindro interno.

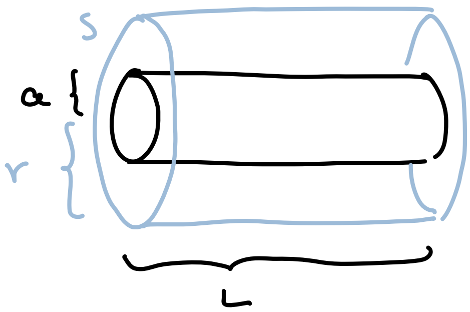
b) **[2p]** Determine el campo eléctrico y la diferencia de potencial entre ambos cilindros.

c) **[1p]** Determine la resistencia total de la estructura.



SOL)

a]



la corriente total que sale del cilindro interior es I:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I \quad 0.5$$

Por simetría e ignorando efectos de borde

$$\vec{J} = J_r(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})\, \hat{r} \quad 0.5$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi r L \; J_r(r) = I \quad 1.0 \quad \Rightarrow \quad \vec{J}(r) = \frac{I}{2\pi L} \frac{\hat{r}}{r} \quad 1.0$$

b]

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{J}/\sigma \quad 0.5$$

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi L} \frac{\hat{r}}{r} \frac{1}{k r} = \frac{I}{2\pi L k} \frac{\hat{r}}{r^2} = \vec{E} \quad 0.5$$

$$V_a - V_b = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{-I}{2\pi L k} \int_a^b \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot dr\, \hat{r} \quad 0.5 \quad = \frac{-I}{2\pi L k} \left. -\frac{1}{r} \right]_a^b$$

$$V_a - V_b = \frac{I}{2\pi L k}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \quad 0.5$$

c]

$$R = \frac{V}{I} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \frac{1}{2\pi L k}$$

0.5   0.5