P_1

La energia potencial eléctrica de una partícula de carga q que se encuentra sometida a un potencial $V(\mathbf{r})$ es

$$U = qV(\vec{r})$$

Si conocemos la diferencia de potencial (V) entre dos puntos, podemos conocer la diferencia de energía potencial

$$\Delta U = qV$$

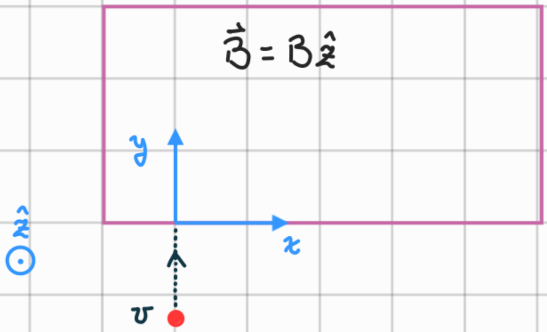
Ahora, si las partículas experimentan un cambio en su energía potencial, esta deberá ser transformada en energía cinética, y como las partículas parten desde el reposo, podemos determinar la rapidez con la que llegan a la zona de campo magnético de la siguiente manera

$$\frac{1}{2} m v^2 = \Delta U$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = qV$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}}$$

Sabiendo esto, podemos determinar la trayectoria que siguen las partículas. Definimos nuestro sistema de referencia y resolvemos como en meca



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

La velocidad la escribiremos como *v* para abreviar, al final haremos el reemplazo por la expresión conocida.

$$q\vec{v} \times \vec{B} = m\ddot{x}\,\hat{x} + m\ddot{y}\,\hat{y}$$

$$q(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}) \times B\hat{z} = m\ddot{x}\,\hat{x} + m\ddot{y}\,\hat{y}$$

$$-q\dot{x}\hat{y}B + q\dot{y}\hat{x}B = m\ddot{x}\,\hat{x} + m\ddot{y}\,\hat{y}$$

$\hat{y}\rfloor$

$$-qB\dot{x} = m\ddot{y} \qquad (1)$$

$\hat{x}\rfloor$

$$qB\dot{y} = m\ddot{x} \qquad (2)$$

Derivando (2) respecto a *t*

$$qB\ddot{y} = m\dddot{x} \longrightarrow \ddot{y} = \frac{m}{qB}\dddot{x}$$

Reemplazando en (1)

$$-qB\dot{x} = \frac{m^2}{qB}\dddot{x}$$

$$\dddot{x} + \frac{q^2B^2}{m^2}\dot{x} = 0$$

Definiendo $\dot{x} \equiv v_x$

$$\ddot{v}_x + \frac{q^2B^2}{m^2}v_x = 0$$

definimos $\omega^2 \equiv \frac{q^2B^2}{m^2}$

Ecuación del oscilador armónico, solución conocida

$$v_x(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) \quad (3)$$

Derivando (1)

$$-q\ddot{x}B = m\dddot{y} \longrightarrow \ddot{x} = \frac{-m}{qB}\dddot{y}$$

Reemplazando en (2)

$$qB\dot{y} = \frac{-m^2}{qB}\dddot{y}$$

$$\dddot{y} + \frac{q^2B^2}{m^2}\dot{y} = 0 \longrightarrow \dddot{y} + \omega^2\dot{y} = 0$$

Definiendo $\dot{y} \equiv v_y$

$$\ddot{v}_y + \omega^2 v_y = 0$$

$$\Longrightarrow v_y(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) \quad (4)$$

Volviendo a (3)

$$v_x(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t)$$

Notemos que cuando la partícula entra en la zona de campo magnético, esta solo tiene velocidad en la dirección vertical (y), por tanto

$$v_x(t=0) = 0 = A_2$$

$$\Rightarrow v_x(t) = A_1 \sin(\omega t) \quad (5)$$

Para (4) notemos que $v_y(t=0) = v$

$$\Rightarrow v_y(t=0) = v = C_2$$

$$\Rightarrow v_y(t) = C_1 \sin(\omega t) + v \cos(\omega t) \quad (6)$$

Por (2) tenemos que

$$\dot{v}_x = \omega v_y$$

$$\omega A_1 \cos(\omega t) = \omega C_1 \sin(\omega t) + \omega v \cos(\omega t)$$

$$t=0 \Rightarrow \omega A_1 = \omega v$$

$$A_1 = v \Rightarrow v_x(t) = v \sin(\omega t) \quad (7)$$

Por (1)

$$-\omega v_x = \dot{v}_y$$

$$-\omega v \sin(\omega t) = \omega C_1 \cos(\omega t) - \omega v \sin(\omega t)$$

$$t=0 \Rightarrow \quad 0 = C_1$$

$$\therefore \quad v_y(t) = v \cos(\omega t) \quad (8)$$

Ahora pasamos a encontrar $x(t)$ e $y(t)$

$$(7) \rightarrow \frac{dx}{dt} = v \sin(\omega t) \Big/ \int dt$$

$$x(t) = -\frac{v}{\omega} \cos(\omega t) + A_3$$

$$(8) \rightarrow \frac{dy}{dt} = v \cos(\omega t) \Big/ \int dt$$

$$y(t) = \frac{v}{\omega} \sin(\omega t) + C_3$$

Como elegimos el origen del sistema justo por donde entra la partícula

$$x(t=0) = 0 = -\frac{v}{\omega} + A_3 \Rightarrow A_3 = \frac{v}{\omega}$$

$$y(t=0) = 0 = C_3$$

$$\therefore$$

$$x(t) = \frac{v}{\omega} - \frac{v}{\omega}\cos(\omega t)$$

$$y(t) = \frac{v}{\omega}\sin(\omega t)$$

Ahora notemos que la partícula abandona la zona de campo magnético cuando y vuelve a ser 0, lo cual deberá ocurrir para $\omega t = \pi$. Esto implica que el tiempo para el que la partícula vuelve a $y = 0$ es

$$t' = \frac{\pi}{\omega}$$

Reemplazando esto en $x(t)$, obtenemos el rango máximo de la partícula, o sea, el diámetro de la circunferencia

$$x(t = \pi/\omega) = \frac{v}{\omega} - \frac{v}{\omega}\cos\left(\omega \frac{\pi}{\omega}\right)$$

$$x(t = \pi/\omega) = \frac{2v}{\omega}$$

Como esto es el diámetro, el radio será

$$r = \frac{v}{\omega}$$

Ahora reemplazamos todo lo que sabemos y despejamos la razón m/q

$$r = \frac{\sqrt{\frac{2qV}{m}}}{\left(\frac{qB}{m}\right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

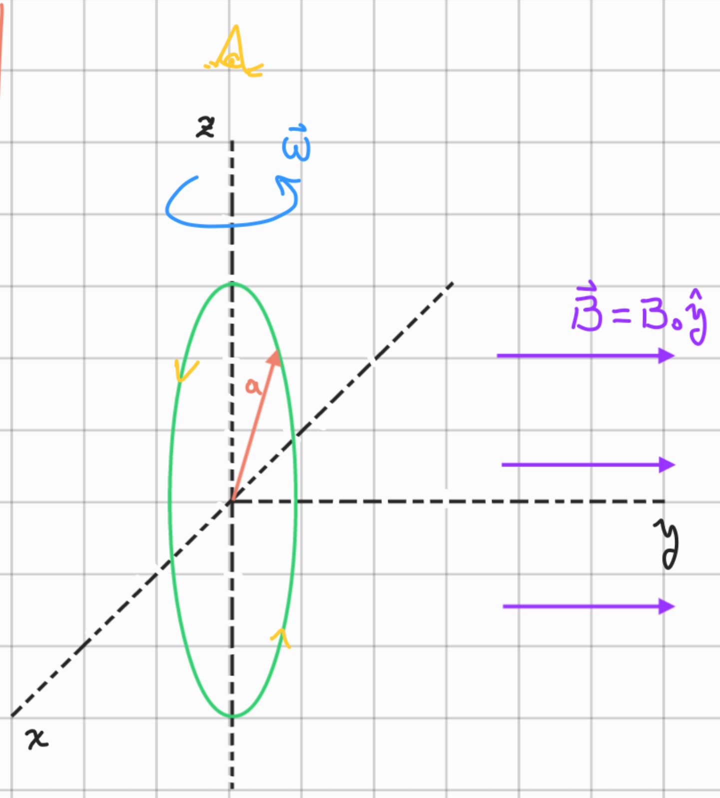
$$\omega^2 = \frac{q^2 B^2}{m^2}$$

$$r^2 = \frac{\frac{2\cancel{q}V}{\cancel{m}}}{\frac{q^{\cancel{2}}B^2}{m^{\cancel{2}}}}$$

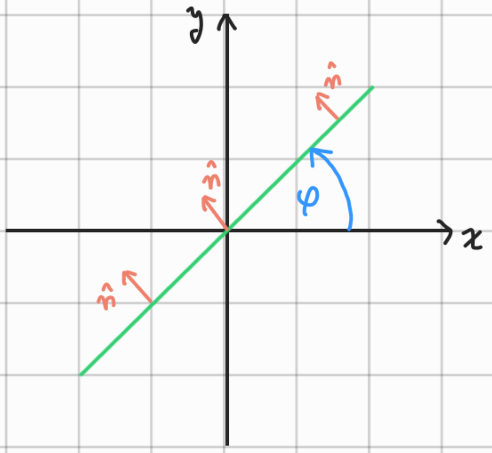
$$r^2 = \frac{m\,2V}{qB^2}$$

$$\boxed{\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2V}}$$

P_2



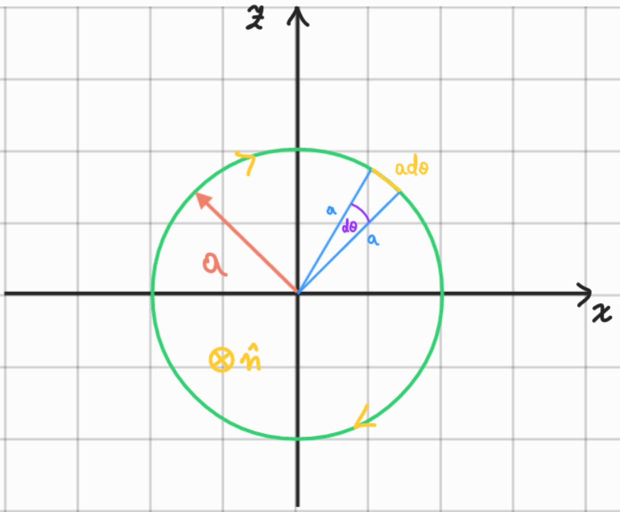
Mirando el sistema desde arriba ( ) veríamos lo siguiente



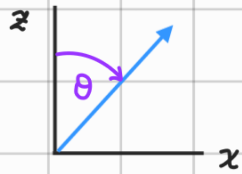
$$\hat{n} = -\sin(\varphi)\,\hat{x} + \cos(\varphi)\,\hat{y}$$

Aquí, el ángulo φ corresponde al ángulo de rotación de la espira.

Si ahora miramos el sistema de frente



Aquí usaremos una nueva coordenada, la cual llamaremos θ, para parametrizar la espira. Esta coordenada se mide desde el eje z



$$\hat{\theta} = \cos\theta \cos\varphi \, \hat{x} + \cos\theta \sin\varphi \, \hat{y} - \sin\theta \, \hat{z}$$

a)

Para calcular la fem inducida, necesitamos conocer elmflujo de campo magnético sobre la espira

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} B_0 \hat{y} \cdot \hat{n} \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} B_0 \int_0^{2\pi} \hat{y} \cdot \left(-\sin(\varphi) \hat{x} + \cos(\varphi) \hat{y} \right) d\theta$$

$$= \frac{a^2 B_0}{2} 2\pi \cos\varphi$$

$$\Phi = \pi a^2 B_0 \cos\varphi$$

Pero recordemos que la espira gira en torno al eje z con velocidad angular $\omega_0 \hat{z}$, esto significa que el angulo φ varía en el tiempo como $\varphi(t) = \omega_0 t$

$$\therefore \quad \Phi(t) = \pi a^2 B_0 \cos(\omega_0 t)$$

De esta manera la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \omega_0 \pi a^2 B_0 \sin(\omega_0 t)}$$

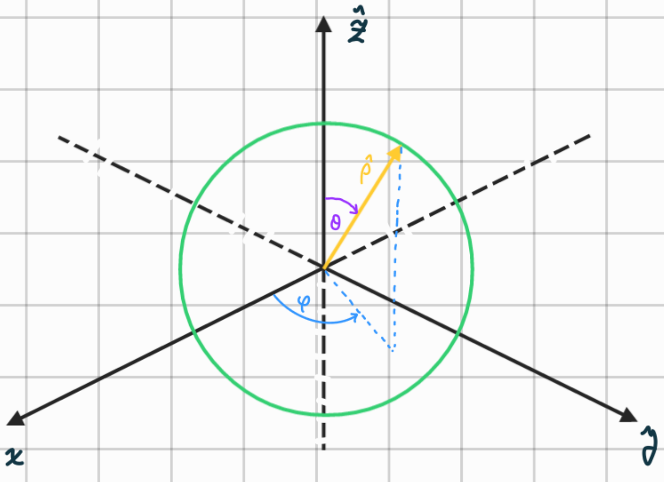
b)

$$V = IR$$

$$\mathcal{E} = IR$$

$$I\, d\vec{r} \times B$$

$$\boxed{I = \frac{\omega_0 \pi a^2 B_0}{R} \sin(\omega_0 t)}$$



$$\hat{\rho} = \sin\theta \cos\varphi\, \hat{x} + \sin\theta \sin\varphi\, \hat{y} + \cos\theta\, \hat{z}$$

c)

$$\tau = \oint_{\Gamma} \vec{r} \times (I\, d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}))$$

$$\tau = \int_0^{2\pi} a\hat{\rho} \times (I a\, d\theta\, \hat{\theta} \times B_0 \hat{y})$$

$$= a^2 B_0 I \int_0^{2\pi} \hat{\rho} \times (\hat{\theta} \times \hat{y})\, d\theta$$

$$= a^2 B_0 I \int_0^{2\pi} \hat{\rho} \times (\cos\theta \cos\varphi\, \hat{x} + \cos\theta \sin\varphi\, \hat{y} - \sin\theta\, \hat{z}) \times \hat{y}\, d\theta$$

$$= a^2 B_0 I \int_0^{2\pi} \hat{\rho} \times (\cos\theta \cos\varphi\, \hat{z} + \sin\theta\, \hat{x})\, d\theta$$

$$= a^2 B_0 I \int_0^{2\pi} (\sin\theta \cos\varphi\, \hat{x} + \sin\theta \sin\varphi\, \hat{y} + \cos\theta\, \hat{z}) \times (\cos\theta \cos\varphi\, \hat{z} + \sin\theta\, \hat{x})\, d\theta$$

$$= a^2 B_0 I \int_0^{2\pi} \cancelto{0}{- \sin\theta \cos\theta \cos^2\varphi\, \hat{y}} + \cancelto{0}{\sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi\, \hat{x}} - \sin^2\theta \sin\varphi\, \hat{z} + \cancelto{0}{\sin\theta \cos\theta\, \hat{y}}\, d\theta$$

$$= -a^2 B_0 I \sin\varphi\, \hat{z} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= -a^2 B_0 I \sin(\omega_0 t)\, \hat{z} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= -a^2 B_0 I \sin(\omega_0 t)\, \hat{z}\, \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}$$

$$= -\pi a^2 B_0 I \sin(\omega_0 t)\, \hat{z}$$

$$= -\pi a^2 B_0 \frac{\omega_0 \pi a^2 B_0}{R} \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)\, \hat{z}$$

$$\boxed{\tau = \frac{-\omega_0 \pi^2 a^4 B_0^2}{R} \sin^2(\omega_0 t)\, \hat{z}}$$