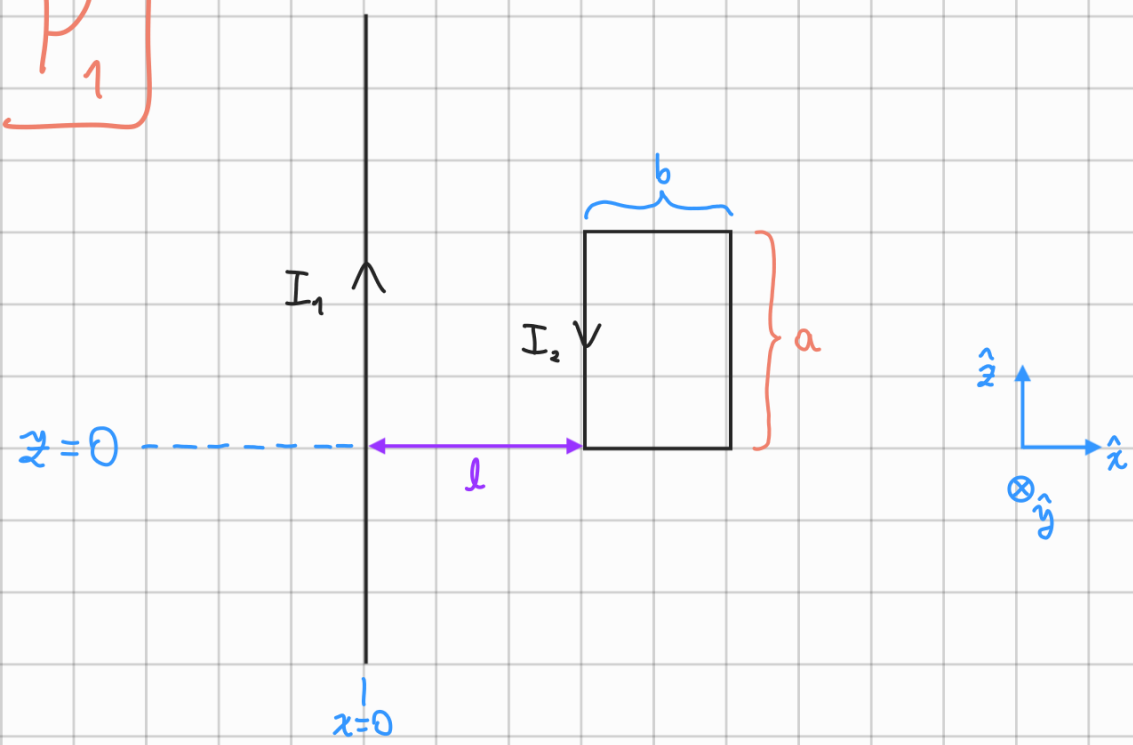
P1



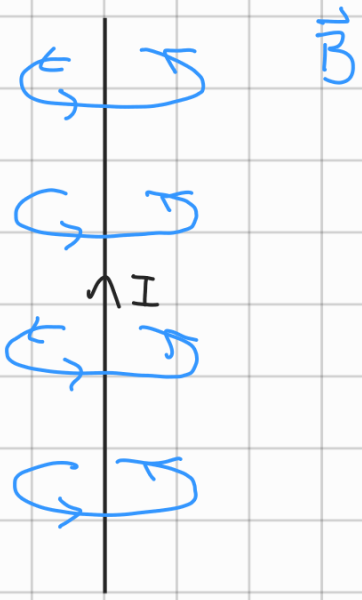
La fuerza que experimenta el circuito rectangular será una consecuencia de la Fuerza de Lorentz, la cual nos dice que una carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$, sumergida en un campo magnético $\vec{B}$ experimentauna fuerza igual a:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

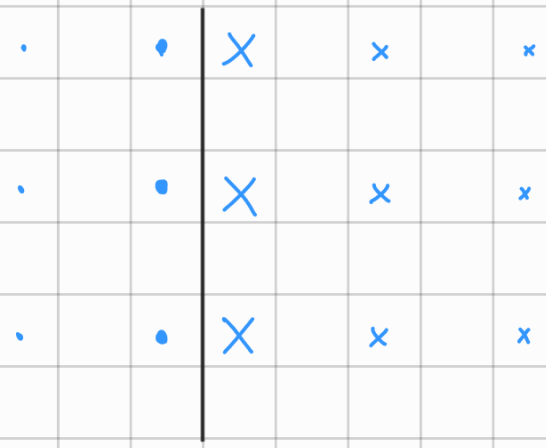
Empecemos por el campo magnético que produce el cable infinito. Como se vio en cátedra, este cable genera un campo igual a:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

Las líneas de campo se verán de la siguiente manera:



El campo magnético se "envuelve" alrededor de la dirección en la que fluye la corriente.
Como la espira rectangular se encuentra en el plano XZ, solo nos interesa la dirección del campo **B** sobre este plano, con ayuda del dibujo de arriba podemos ver que el campo sobre este plano se verá como:



Donde los puntos indican que el campo está "saliéndo" hacia afuera de la hoja, mientras que las cruces indican que en esa zona el campo "entra" hacia la hoja. Y dada la elección de nuestros vectores unitarios, podremos decir que el campo magnético en el lado derecho del cable (que es donde está el circuito) apunta en $\hat{y}$, es decir $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{y}$

Otra forma de ver esto es considerando que:

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(-\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y})$$

Y el plano XZ corresponde a $\varphi = 0$

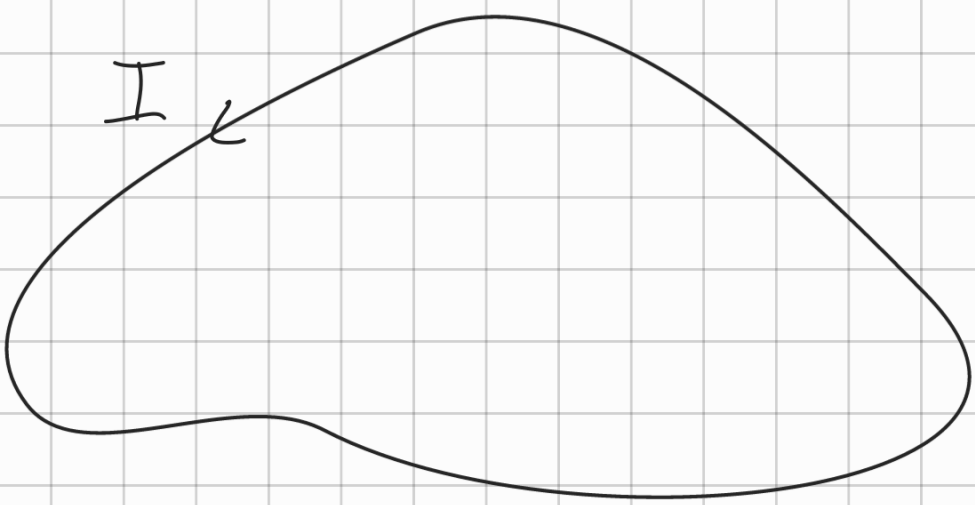
$\therefore$ el campo en este plano será

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{y}$$

Pero como solo estamos interesados en el plano XZ, y el campo magnético no depende de *z*, podemos escribir

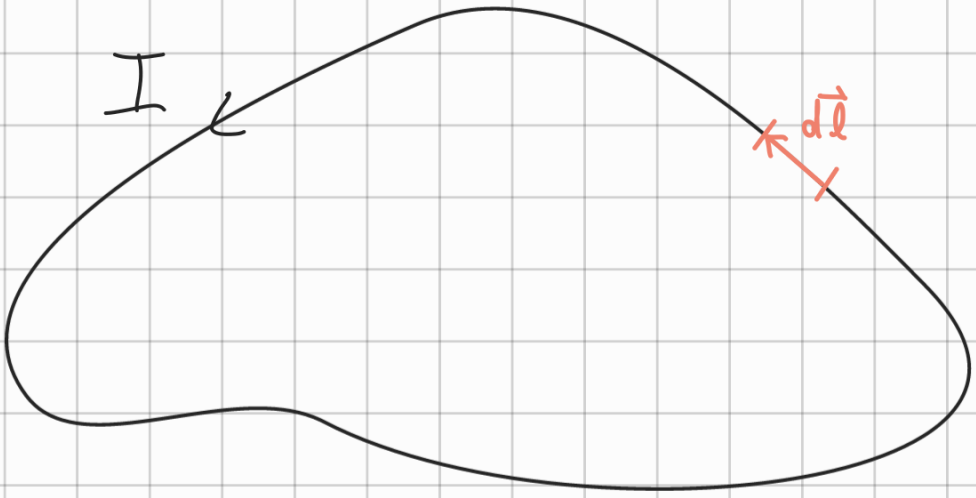
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\hat{y}}$$

Ahora vamos con la Fuerza de Lorentz.
Pensemos en un circuito de forma arbitraria por el que fluye una corriente *I*



Si este circuito se encuentra inmerso en un campo magnético **B**, necesariamente habrá una fuerza actuando sobre él, pues la corriente es movimiento de cargas, y sabemos que cuando una carga se mueve en un campo magnético, esta sufre una fuerza. Pero ¿cómo calculamos esta fuerza?

Tomemos un pedacito de largo dl de nuestro circuito, demosle alguna orientación, de modo que nos quede $d\vec{l}$



Este pedacito de cable posee un "pedacito" de carga *dQ,* y sabemos que además esta carga se está moviendo a lo largo del cable, pues existe una corriente *I*, la cual se define como

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Y la velocidad con la que la carga se mueve en ese punto del cable será

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

Por lo que debido a la Fuerza de Lorentz, este pedacito de cable experimentará un pedacito de fuerza que se verá como:

$$d\vec{F} = dQ\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Ahora hacemos algo de álgebra para escribir esto en términos de cosas conocidas

$$d\vec{F} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Esta es la fuerza que experimenta el pedacito de cable. Ahora, para saber la fuerza que siente el circuito entero, necesitamos saber la fuerza que siente cada pedacito de este, y luego sumar todas esas contribuciones (superposición), por fortuna esto podemos hacerlo mediante integración, o sea:

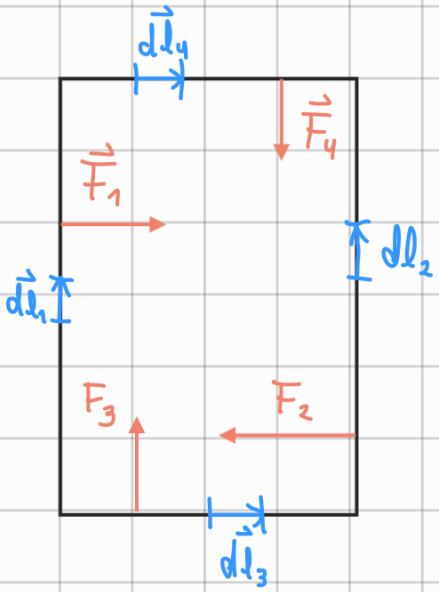
$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \Big/ \int$$

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Y con esta fórmula podremos calcular la fuerza que siente un circuito cualquiera que este inmerso en un campo magnético.

Volviendo a nuestro problema, nuestro circuito tiene 4 parte, sobre las cuales podemos calcular la fuerza individualmente

y para encontrar la fuerza total solo deberemos sumar las 4 fuerzas individuales.
Las fuerzas que siente cada pedazo serán y nuestros diferenciales de camino ($d\vec{l}$) serán:



Empezamos por $\vec{F}_1$

$$\vec{F}_1 = \int I \, d\vec{l}_1 \times \vec{B}$$

Como esta línea está en $x = l$ y orientamos el diferencial de camino hacia arriba, nos queda

$$\vec{F}_1 = \int_0^a I \, dz\hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi l}\hat{y}$$

por otro lado, la corriente fluye en el sentido opuesto al de la orientación del diferencial de camino (***dl***), tendremos que

$$\vec{F}_1 = \int_0^a (-I_2)\, dz\hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi l}\hat{y}$$

$\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$

$$\vec{F}_1 = -I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi l} (\hat{x} \times \hat{y}) \int_0^a dz \qquad \hat{x} \times \hat{y} = -\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi l} \hat{x}}$$

Para F_2 la línea se encuentra en $x = l + b$, mientras que que la corriente fluye en el mismo sentido de ***dl***, por tanto

$$\vec{F}_2 = \int_0^a I_2 \, dz \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (l+b)} \hat{y}$$

$$\boxed{\vec{F}_2 = \frac{-\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi (l+b)} \hat{x}}$$

En el caso de $\vec{F}_3$ tenemos que el cable está a lo largo del eje x, por lo que deberemos dejar la dependencia de *x* en el campo Por lo demás, la corriente fluye en el mismo de ***dl***, entonces

$$\vec{F}_3 = \int_l^{l+b} I_2 \, dx \hat{x} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \hat{y} \qquad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\vec{F}_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \hat{z} \int_l^{l+b} \frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\vec{F}_3 = \frac{-\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{l+b}{l}\right) \hat{z}}$$

$\vec{F}_4$ es análogo al caso anterior, con la diferencia de que en este tramo la corriente fluye en el sentido opuesto a ***dl***, de modo que tendremos

$$\vec{F} = \int_l^{l+b} (-I_2)\, dx\, \hat{x} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \hat{y}$$

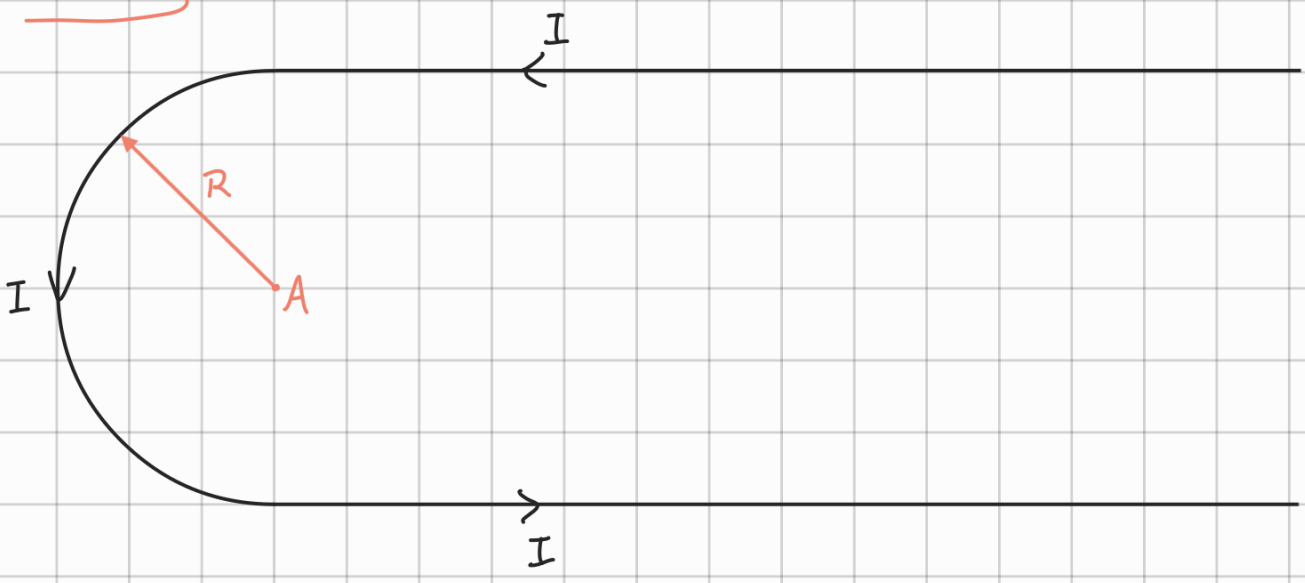
Pero esto es simplemente $-\vec{F}_3$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{F}_4 = -\vec{F}_3}$$

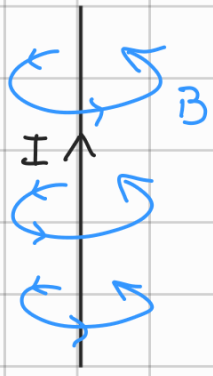
Finalmente, al sumar las fuerzas encontramos que la fuerza total es

$$\boxed{\vec{F}_T = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+a}\right) \hat{x}}$$

P_2



¿Cómo se verá el campo magnético?
Las líneas de campo magnético se "envuelven" alrededor del flujo se corriente, si tenemos un alambre con corriente I, el campo magnético se verá así

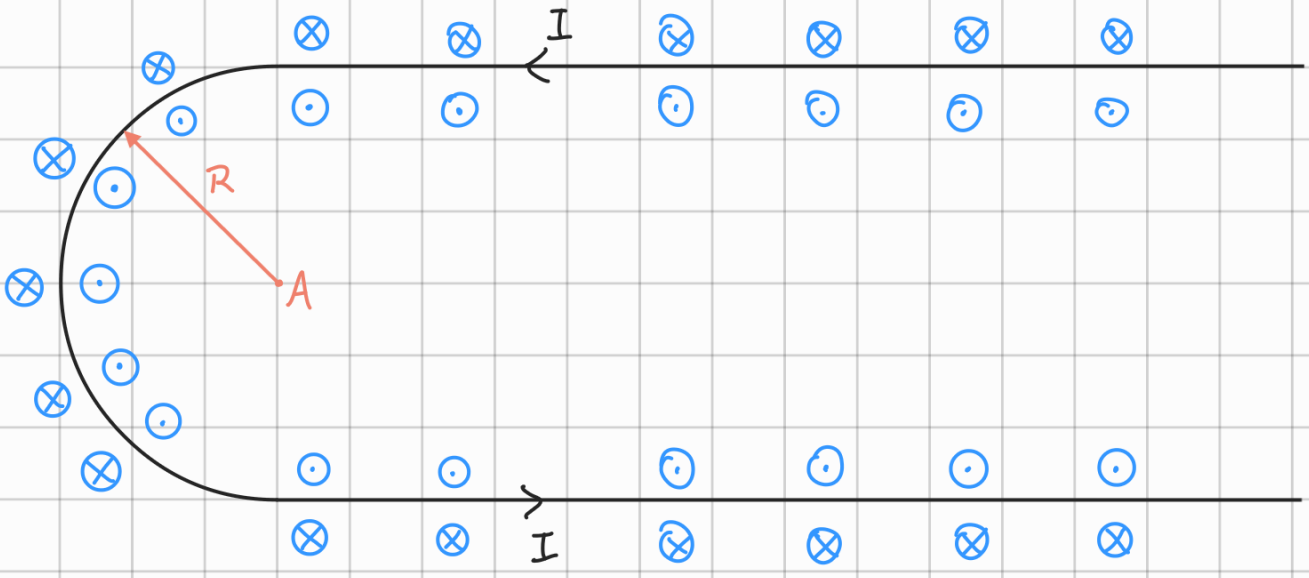


Si miramos esto perfectamente de "perfil", solo veremos flechas entrando y saliendo de la hoja (o pantalla xd). Por lo que otra manera de hacer esta ilustración es

⊙ Flecha que sale de la hoja.

⊗ Flecha que entra a la hoja.

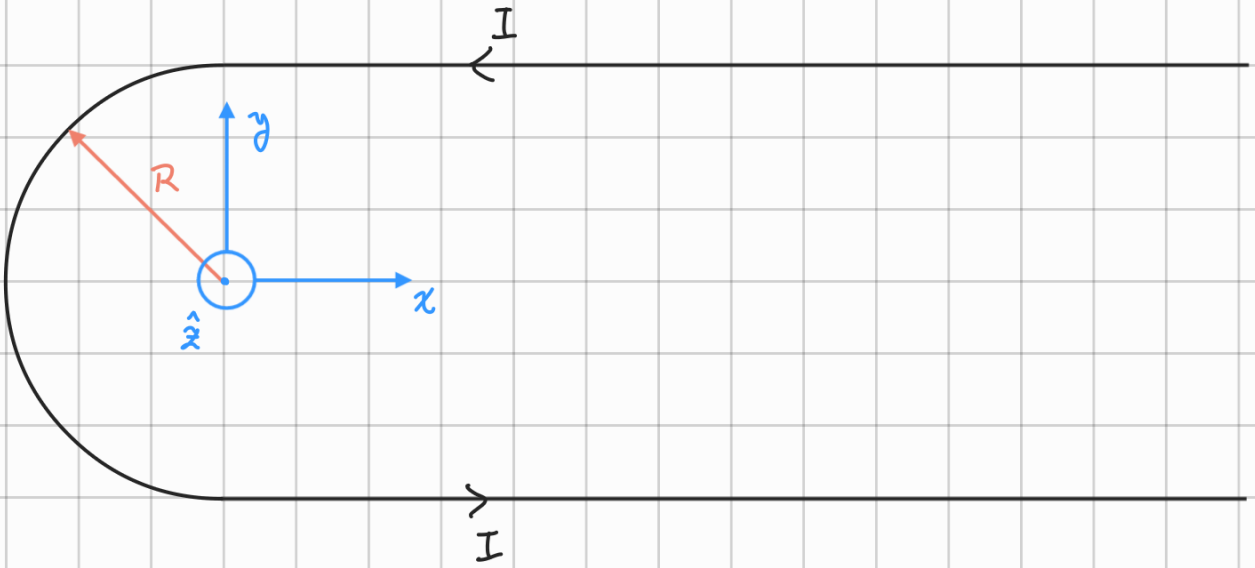
Por lo que el campo magnético del sistema que tenemos se verá así



Notemos que en la parte "interior", y en particular en el punto *A*, todas las flechas apuntan hacia afuera de la hoja, por lo que nuestro resultado del cálculo deberá ser consistente con esto.

b)

Colocamos nuestro sistema de referencia en el pto. *A*



El campo magnético lo calcularemos por definición, es decir,

usando Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Gamma} I\,d\vec{l}' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Así como calculábamos el campo eléctrico por definición, debemos identificar donde está el pto. donde queremos calcular el campomagnético, donde está la corriente y además el sentido en el que esta fluye.

$\vec{r}$: Lugar donde queremos calcular $\vec{B}$.

$\vec{r}'$: Lugar donde está la corriente.

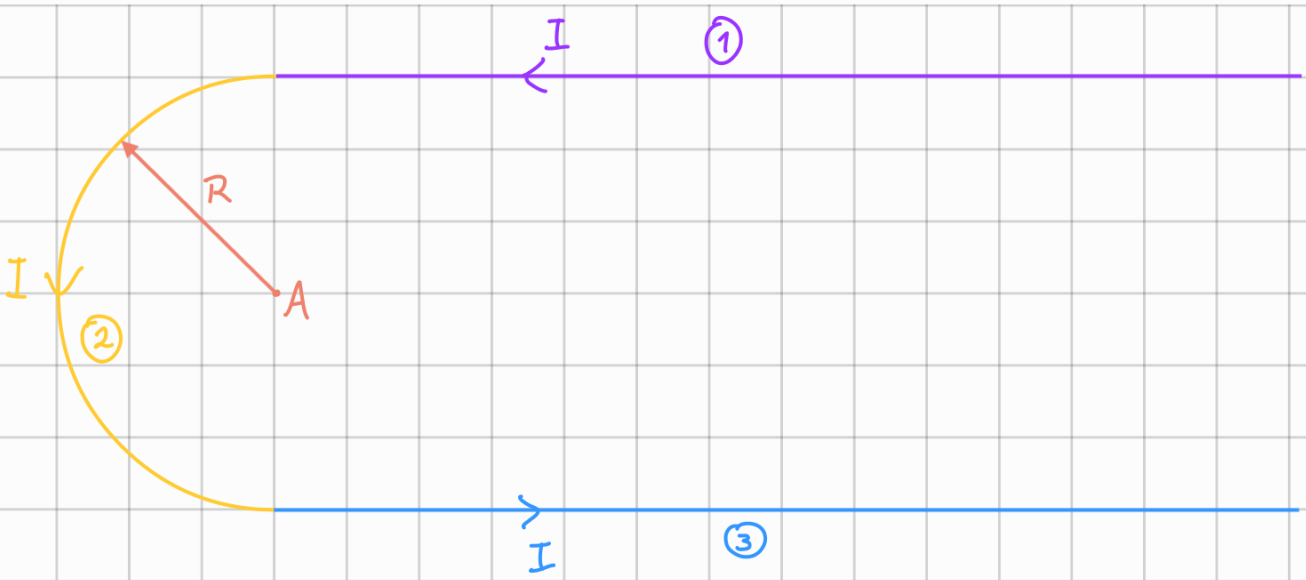
I: Corriente.

$d\vec{l}'$: Parametrización de la corriente y sentido en el que fluye.

Como el origen está justo donde queremos conocer el campo

$\vec{r} = 0$

Ahora, notemos que nuestro sistema tiene una geometría cartesiana "fusionada" con una geometría polar, por lo que no basta con un único sistema de coordenadas para resolver. De esta forma, lo que podemos hacer es usar el principio de superposición, lo que haremos será descomponer nuestras fuentes de campo magnético en 3 partes, calcularemos el campo que genera cada una, y finalmente la el campo total será la suma de cada una.
El sistema lo separaremos así:



De modo que el campo total será

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

Pero notemos una cosa. ¿Cómo son el cable 1 y 3? Se parecen mucho, ambos están a la misma altura por sobre el punto *A* y se extienden infinitamente hacia la derecha, además ambos generan una contribución al campo que apunta hacia afuera de la hoja. Es decir, ambos generan literalmente el mismo aporte en el punto *A*, por lo tanto

$$\vec{B}_1(A) = \vec{B}_3(A) \Rightarrow \vec{B} = 2\vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

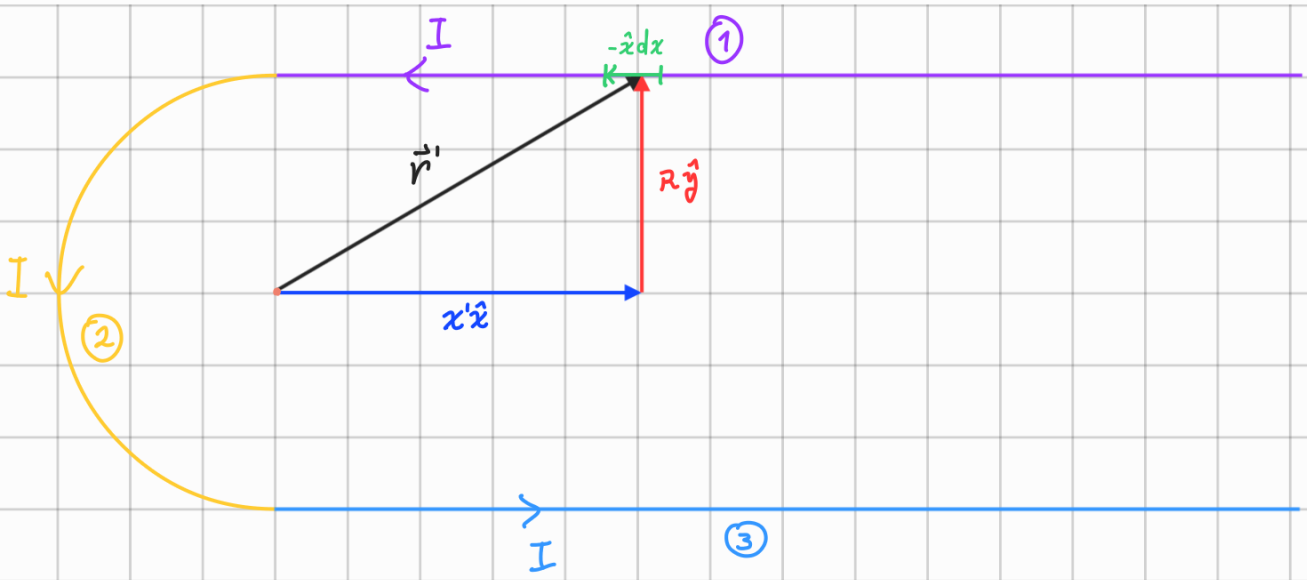
De este modo solo necesitaremos conocer el aporte $\vec{B}_1$ para saber también $\vec{B}_3$

Parametricemos entonces la corriente (1)

Notemos que esta está a una altura *R* por sobre el origen, y además se extiende infinitamente hacia la derecha, por lo tanto

$$\vec{r}' = x'\hat{x} + R\hat{y} \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}' = -x'\hat{x} - R\hat{y} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = \left(x'^2 + R^2\right)^{3/2}$$

Recordar: $\vec{r} = 0$



Además la corriente fluye únicamente en la dirección x y hacia la izquierda, o sea en sentido $(-\hat{x})$ de modo que

$$I d\vec{l}' = I(-\hat{x})dx' = -I\hat{x}\,dx'$$

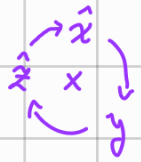
Finalmente, el cable se extiende desde el infinito positivo, hasta $x = 0$, por lo que

$$x' \in [0, \infty)$$

que serán los límites de integración.

$$\vec{B}_1(A) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\infty} -I\hat{x}dx \times \frac{(-x'\hat{x} - R\hat{y})}{(x'^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\infty} \frac{\hat{x}\times(-x'\hat{x} - R\hat{y})}{(x'^2 + R^2)^{3/2}}\,dx;$$



$\hat{x}\times\hat{x} = 0$

$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$

$$= \frac{+\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\infty} \frac{+R\hat{z}\,dx}{(x'^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\hat{z}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x'^2+R^2)^{3/2}}\,;$$

C.V.

$x = R\,tg\,\theta$

$dx = R\,sec^2\theta\,d\theta$

$$= \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\hat{z}\,\frac{x}{R^2\sqrt{x^2+R^2}}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\hat{z}\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x}{R^2\sqrt{x^2+R^2}} - 0\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\hat{z}\,\frac{1}{R^2}$$

$$\boxed{\vec{B}_1(A) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\hat{z}}$$

Ahora para $\vec{B}_3$ usamos coordenadas polares.

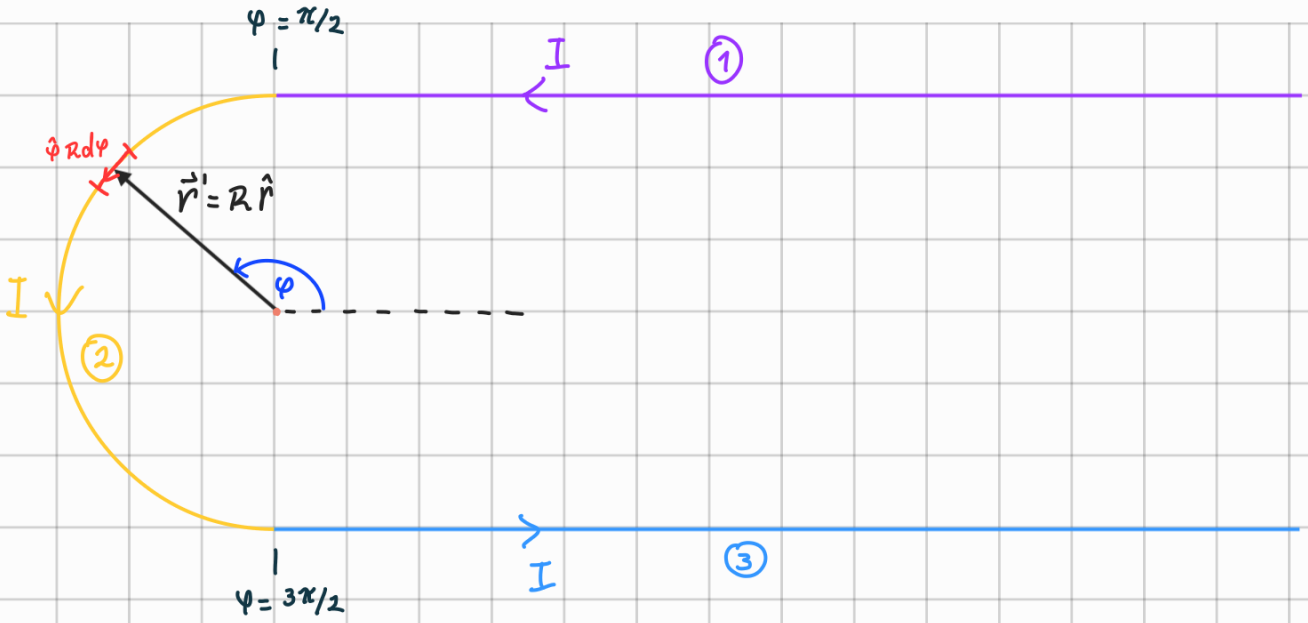
Recordemos que: $\vec{r} = 0$

Como el tercer cable está a una distancia R del centro, tenemos que

$$\vec{r}' = R\hat{r} \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}' = -R\hat{r} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = R^3$$

Y como la corriente fluye siguiendo un círculo de radio R en sentido anti-horario, se tiene que

$$I\,d\vec{l}' = I\,\hat{\varphi}\,R\,d\varphi$$



$$\vec{B}_2(A) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\pi/2}^{\frac{3\pi}{2}} I\,\hat{\varphi}\,R\,d\varphi \times \frac{-R\hat{r}}{R^2}$$

$\hat{\varphi} \times \hat{r} = -\hat{z}$

$$= \frac{+\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\pi/2}^{\frac{3\pi}{2}} (+\hat{z})\,d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\,\hat{z}\int_{\pi/2}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\,\hat{z}\,\pi$$

$$\boxed{\vec{B}_2(A) = \frac{\mu_0 I}{4R}\hat{z}}$$

$$\therefore \quad \vec{B}(A) = 2 \times \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\hat{z} + \frac{\mu_0 I}{4R}\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{B}(A) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\hat{z}}$$

P3

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\left(1 - \frac{r}{2a^2}\right)\hat{\varphi} = B_\varphi$$

Como ya conocemos **B**, dentro del cilindro, podemos conocer la densidad de corriente usando la forma diferencial de la Ley de Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

En coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right) \times r & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\mu_0 J_0 r^2}{2}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\hat{r}\left(\frac{\partial 0}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right) - r\hat{\varphi}\left(\frac{\partial 0}{\partial r} - \frac{\partial 0}{\partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - 0\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\hat{z}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_0 J_0 r^2}{2}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{\mu_0 J_0}{2r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 - \frac{r^4}{2a^2}\right)\hat{z} = \frac{\mu_0 J_0}{2r}\left(2r - \frac{4r^3}{2a^2}\right)\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 J_0}{2r}\left(2r - \frac{2r^3}{a^2}\right)\hat{z}$$

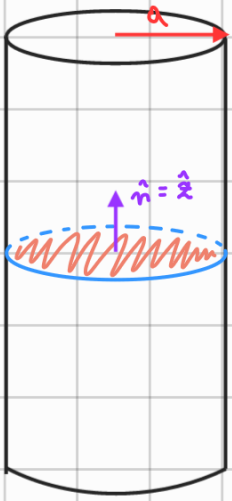
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\hat{z} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{J} = J_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\hat{z}$$

Para la intensidad de corriente lo que hacemos es encontrar el flujo de corriente que atraviesa a toda la sección transversal del cilindro, es decir calculamos la integral de flujo sobre la sección transversal del cilindro

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

En este caso la sección transversal es un círculo con un radio igual al de la tubería, por lo tanto



$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} J_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\underbrace{\hat{z}\cdot\hat{z}}_{=1} r\, dr\, d\varphi$$

$$I = 2\pi J_0 \int_0^a r - \frac{r^3}{a^2}\, dr$$

$$= 2\pi J_0\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2}\right)\Bigg|_0^a$$

$$= \cancel{2}\pi J_0\left(\frac{a^2}{\cancel{2}} - \frac{a^{\cancel{4}^{\cancel{2}}}}{\cancel{4}_{\cancel{2}}a^2}\right)$$

$$= \pi J_0 a^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$I = \frac{\pi J_0 a^2}{2}$$

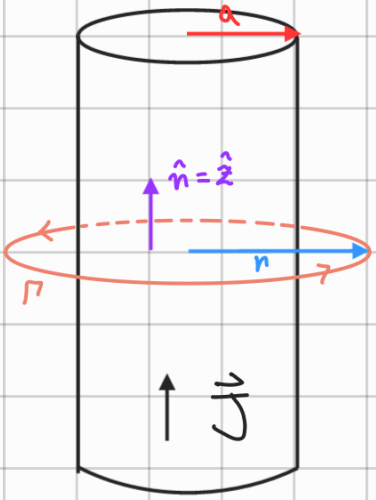
b)

Por la simetría del problema podemos calcular el campo magnético en el exterior haciendo uso de la Ley de Ampère en su forma integral

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl.}$$

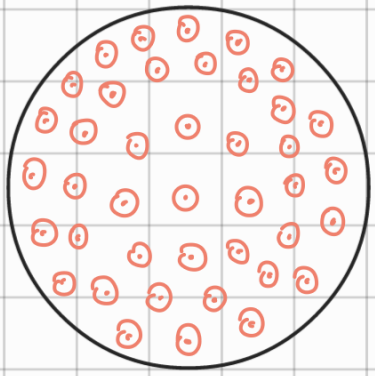
Como queremos conocer el campo fuera del tubo, hacemos un camino amperiano de circular de radio $r > a$ que enlace toda la corriente



Notemos que este camino enlaza toda la corriente que fluye dentro de la tubería, pero este valor ya lo calculamos antes en la parte anterior, por lo que ya conocemos el lado derecho de la ecuación

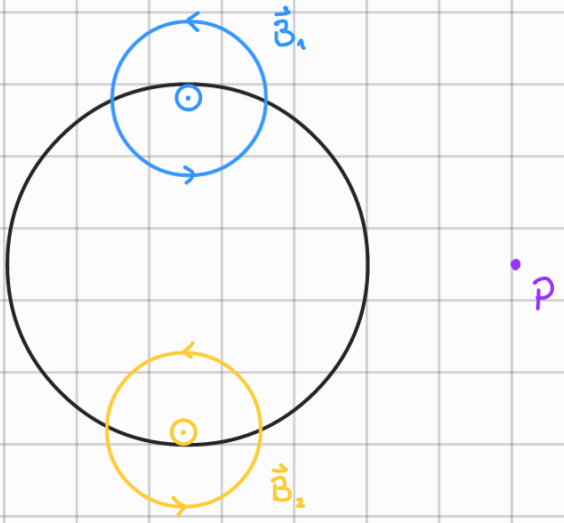
$$I_{enl.} = \frac{\pi J_0 a^2}{2}$$

Ahora debemos calcular la integral de la izquierda, pero antes determinemos qué forma debe tener el campo magnético. Notemos que la corriente fluye únicamente en el sentido $\hat{z}$ además su intensidad solo depende de la coordenada radial. Aunque la densidad de corriente es continua, podemos pensar en esta como un cúmulo de muchos alambres delgados por los que fluye corriente, con esta idea en mente, si hacemos un corte transversal del la tubería veríamos lo siguiente

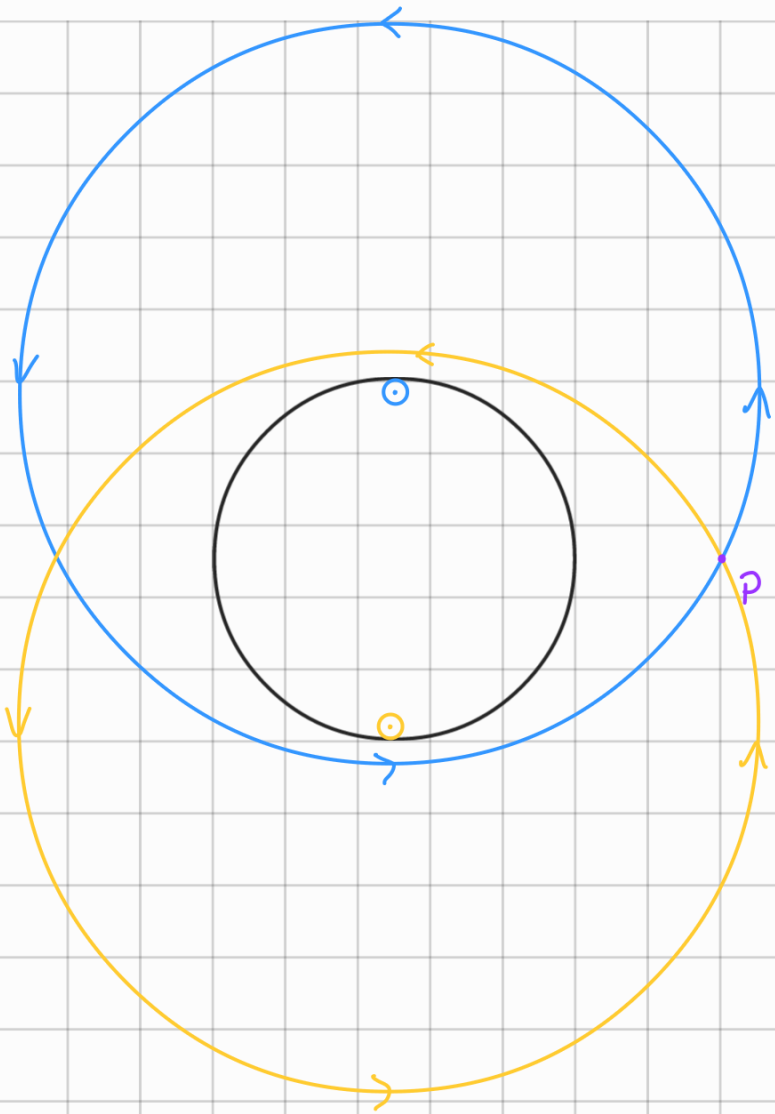


La idea sería que hubieran una infinidad de cables infinitamente pequeños transportando corriente, pero como que me costaría dibujar eso.

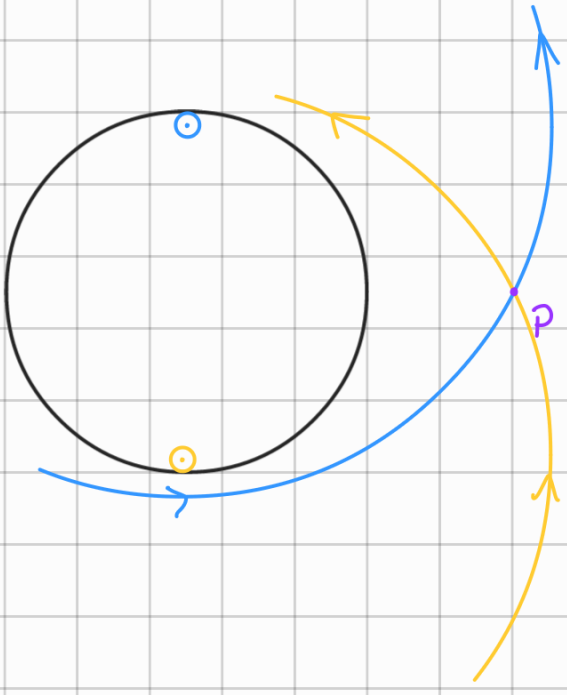
Ahora pensemos en el campo que generan 2 de estos cablecitos ubicados en extremos opuestos dentro del tubo en algún punto *P*



Cada cable genera su propio campo magnético **B** qué se envuelve a su alrededor. Para ver como es el campo generado por cada cable en el punto *P*, vamos a extender dicha líneas de campo

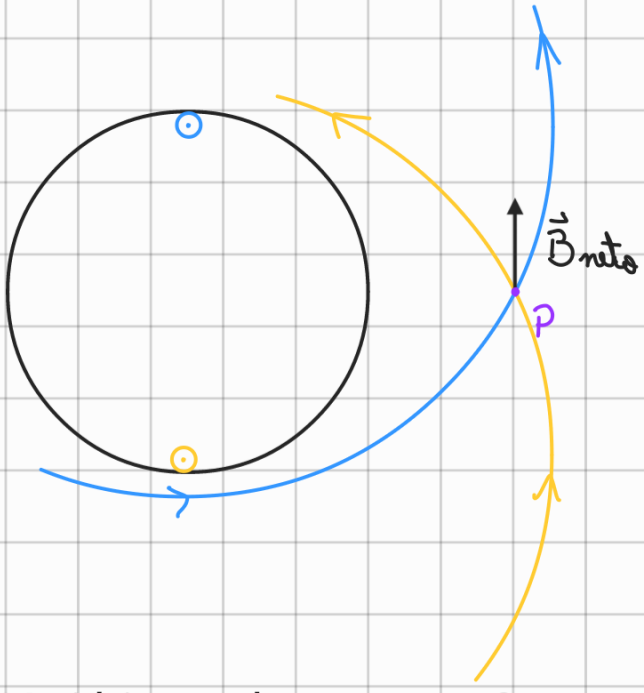


El dibujo es algo complicado, es una mejor idea quedarse con el comportamiento de los campo cerca de *P*.



Vemos que justo en el punto *P* los campos se comportan de esta manera

Como el campo total es la suma de cada uno, el campo neto solo será una flecha qué apunta directo hacia arriba.



Y si bien solo usamos 2 puntos (o cablecitos) para este análisis, esto se puede extender para todos los otros cablecitos que hay entre los 2 que elegimos. Por otro lado, si ahora pusiéramos nuestro punto *P* en la parte superior en vez de el lado derecho, veríamos que el **B** apunta hacia la izquierda, ahora en vez de tomar 2 cables en los extremos superior e inferior, solo debe tomar 2 cables en los extremos laterales, o simplemente puede girar la hoja y ver que una vez que el punto este en la parte superior, el **B** neto que ya dedujimos apunta hacia la izquierda. De hecho, si va girando la hoja, verá que para cada punto alrededor del cilindro, el campo neto apunta de forma paralela a la superficie del tubo, este sentido en el que apunta **B** es precisamente $\hat{\varphi}$

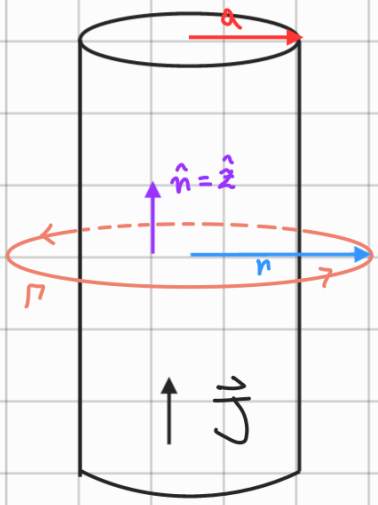
$\therefore$

$$\vec{B} = B(r)\,\hat{\varphi}$$

Sabiendo esto, podemos hacer uso de la forma integral de la Ley de Ampère para resolver

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encl.}$$

Como dijimos anteriormente, nuestro camino amperiano Γ será un círculo de radio $r > a$ orientado en $\hat{\varphi}$.



En este caso, el diferencial de camino se puede escribir como

$$d\vec{l} = \hat{\varphi} r d\varphi$$

Y ahora solo reemplazamos todo lo que sabemos en la Ley de Ampère

Recordando también que $I_{encl.} = \frac{\pi J_0 a^2}{2}$

$$\int_0^{2\pi} B(r) \overbrace{\hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi}}^{=1} r d\varphi = \mu_0 \frac{\pi J_0 a^2}{2} ;$$

$B(r)$ no depende de φ, lo sacamos

$$B(r) r \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 \pi J_0 a^2}{2}$$

$$B(r) r \, 2\pi = \frac{\mu_0 \pi J_0 a^2}{2}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{4r}$$

Y por los argumentos de simetría que ya expusimos, concluimos con el sentido del campo magnético.

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{4r}\hat{\varphi}$$

c)

Ahora debemos suponer que además del flujo de corriente dentro del tubo, tenemos otro flujo de corriente (uniforme) por la superficie de este, tal que esta nueva corriente provoque un nuevo campo magnético $\vec{B}_2$ que anule el que ya calculamos fuera de la tubería, o sea

$$\vec{B}_1(r>a) + \vec{B}_2 = 0$$

Como ya vimos, el flujo de corriente al interior del tubo fluye hacia arriba, entonces si queremos anular el campo al exterior de la tubería, la corriente superficial deberá moverse en el sentido opuesto, es decir

$$\vec{K} = K_0(-\hat{z}) = -K_0\hat{z}$$

Por otro lado, gracias a los mismos argumentos de simetría que vimos antes, sabemos que el campo que generará esta nueva corriente tendrá la siguiente forma

$$\vec{B}_2 = B_2(r)\hat{\varphi}$$

Por lo que podemos despejar $\vec{B}_2$ en función de K_0 usando Ampère nuevamente, con el mismo camino Γ de antes

$$\int_0^{2\pi} B_2(r)\hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi}\, r\, d\varphi = \mu_0 I_{enl}^{(2)}$$

$$2\pi r B_2(r) = \mu_0 I_{enl}^{(2)}$$

Ahora solo necesitamos la nueva corriente enlazada. Notemos que una densidad de corriente volumétrica **J** atraviesa una superficie plana, entonces si ahora tenemos una densidad superficial **K**, esta ya no atraviesa una superficie, sino una línea. Notemos que si "bajamos una dimensión" en la corriente, es de decir, de corriente volumétrica a superficial, también bajamos una dimensión en lo que esta corriente atraviesa, de un plano a una línea.
Como en este caso la corriente **K** fluye por el borde del cilindro, la línea qué atraviesa es el círculo asociado a este borde, el cual tiene un perímetro igual a $2\pi a$, y como la corriente **K** es uniforme, la corriente enlazada solo será la corriente por el largo de la línea qué atraviesa, es decir

$$I_{enl}^{(2)} = -K_0 \cdot l = K_0 \cdot 2\pi a$$

$$I_{enl}^{(2)} = -2\pi a K_0$$

Se agrega el signo menos porque la corriente fluye hacia abajo.

Reemplazando en Ampère

$$2\pi r B_2(r) = -\mu_0 2\pi a K_0$$

$$B_2(r) = \frac{-\mu_0 a K_0}{r}$$

Y por la simetría

$$\vec{B}_2(r) = \frac{-\mu_0 a K_0}{r} \hat{\varphi}$$

Recordemos que lo que queremos determinar es **K** tal que

$$\vec{B}_1(r>a) + \vec{B}_2 = 0$$

$$\vec{B}_2 = -\vec{B}_1 \quad (r > a)$$

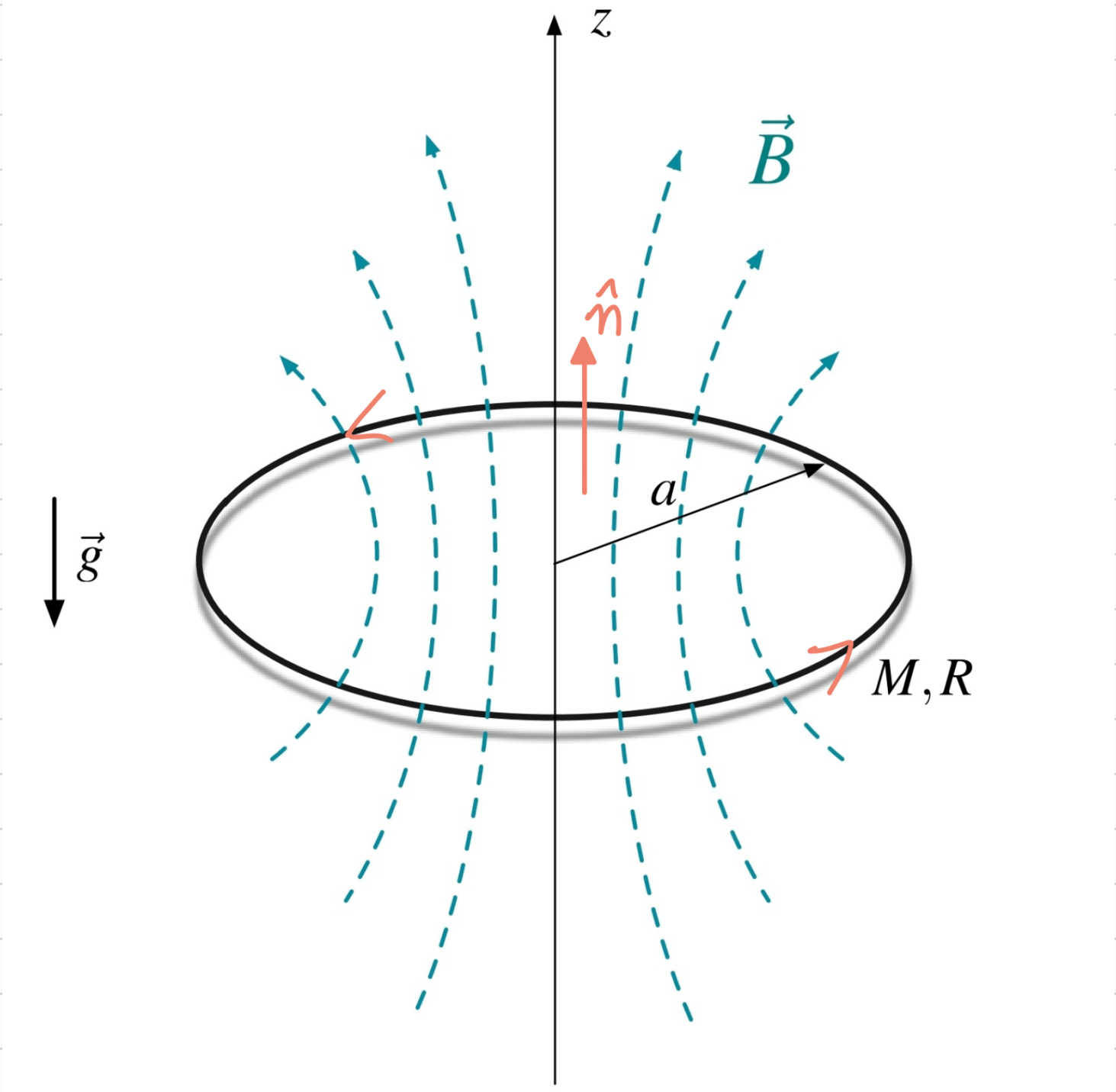
$$\frac{-\mu_0 a K_0}{r}\hat{\varphi} = \frac{-\mu_0 J_0 a^2}{4r}\hat{\varphi} \quad / \cdot \hat{\varphi}$$

$$+K_0 = +\frac{J_0 a}{4}$$

$$K_0 = \frac{J_0 a}{4}$$

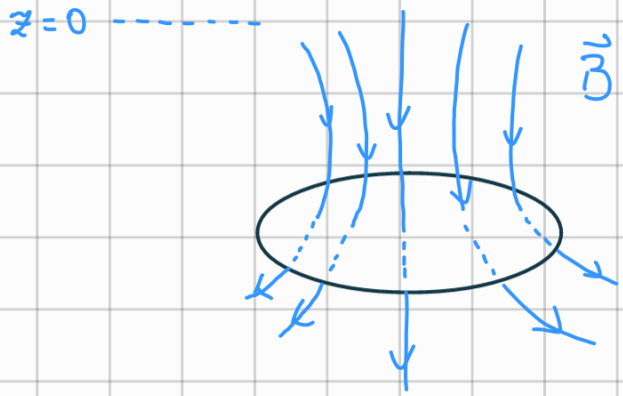
$\therefore$ $$\boxed{\vec{K} = -\frac{J_0 a}{4}\hat{z}}$$

P4

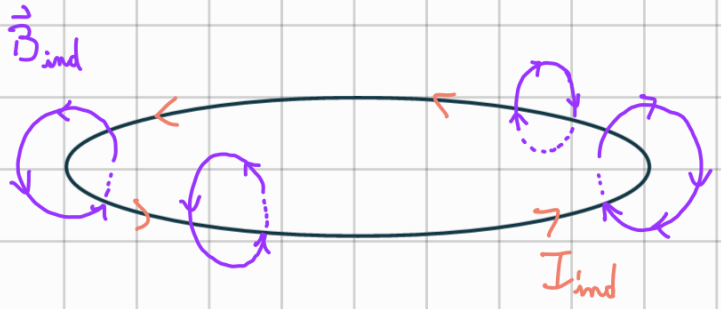


a)

La Ley de Faraday-Lenz nos dice que la corriente que se induce en un circuito deberá generar un campo magnético que se oponga al flujo de campo magnético. En nuestro caso, el flujo de campo magnético externo sobre el anillo se verá de la siguiente forma



Por lo tanto, la corriente inducida en el anillo deberá fluir en sentido anti-horario, ya que de esta manera se generará un campo magnético que se opone al flujo del campo magnético externo



b)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = IR$$

$$\Phi = \int_S \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Elegimos $\hat{z}$ como la normal de la superficie. Esto, en adición a la geometría, nos da que

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \vec{B} \cdot \hat{z} \, r \, dr \, d\varphi$$

Pero ¿cómo es **B**?

En general

$$\vec{B}(r,\varphi,z) = B_r(r,\varphi,z)\hat{r} + B_\varphi(r,\varphi,z)\hat{\varphi} + B_z(r,\varphi,z)\hat{z}$$

Sin embargo, se nos dice que **B** es axisimétrico, es decir, que el campo **B** no cambiará si damos vueltas en torno al eje *z*, esto implica que **B** no tiene dependecia de φ, o sea

$$\vec{B} = \vec{B}(r,z)$$

Y por enunciado $B_z = Cz$

$$\Rightarrow \vec{B}(r,z) = B_r(r,z)\hat{r} + B_\varphi(r,z)\hat{\varphi} + Cz\hat{z}$$

Reemplazando en Φ

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \left(B_r(r,z)\hat{r} + B_\varphi(r,z)\hat{\varphi} + Cz\hat{z}\right)\cdot \hat{z}\, r\, dr\, d\varphi$$

Recordando $\hat{r}\cdot\hat{z}=0$, $\hat{\varphi}\cdot\hat{z}=0$ y $\hat{z}\cdot\hat{z}=1$

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} Cz\, r\, dr\, d\varphi$$

$$\Phi = \pi a^2 C z$$

$$\Rightarrow -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 C \dot{z}$$

* $\dot{z} \equiv \frac{dz}{dt}$ (notación)

$$\Rightarrow -\pi a^2 C\dot{z} = IR$$

$$\boxed{I = \frac{-\pi a^2 C \dot{z}}{R}}$$

c)

$$\vec{F} = \int I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} I\hat{\varphi} \times \left(B_r(r,z)\hat{r} + B_\varphi(r,z)\hat{\varphi} + Cz\hat{z}\right) a\, d\varphi$$

Necesitamos conocer B_r

Para esto usaremos que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

La divergencia en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0$ * y $B_z = Cz \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + C = 0$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) = -Cr \quad / \int dr$$

$$r B_r = -\frac{Cr^2}{2} + A$$

$$B_r = -\frac{Cr}{2} + \frac{A}{r}$$

$\vec{B}(r=0) \not\longrightarrow \infty \Rightarrow A = 0$

$\therefore$

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} I\,\hat{\varphi} \times \left(-\frac{Ca}{2}\hat{r} + B_\varphi(r,z)\hat{\varphi} + Cz\hat{z}\right) a\,d\varphi$$

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} I\left(\frac{Ca}{2}\hat{z} + Cz\hat{r}\right) a\,d\varphi$$

* $\vec{B}$ es axisimétrico, ie., no varía al cambiar φ.

$\hat{\varphi} \times \hat{r} = -\hat{z}$

$\hat{\varphi} \times \hat{\varphi} = 0$

$\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{r}$

$$F_r = \int_0^{2\pi} I C z \hat{r}\, a\, d\varphi$$

$$\hat{r} = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow F_r = I C z a \int_0^{2\pi} (\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y})\, d\varphi$$

$\cos\varphi\,\hat{x}$ → 0 and $\sin\varphi\,\hat{y}$ → 0

$$\boxed{F_r = 0}$$

$$F_z = \int_0^{2\pi} I \frac{Ca}{2}\, a\, d\varphi$$

$$\boxed{F_z = \pi I C a^2}$$

d)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = \pi I C a^2 \hat{z} - Mg\hat{z}$$

$$\pi I C a^2 - Mg = M\ddot{z}$$

$$\pi\left(\frac{-\pi a^2 C \dot{z}}{R}\right) C a^2 - Mg = M\ddot{z}$$

$$-\frac{\pi^2 a^4 C^2}{MR}\dot{z} - g = \ddot{z}$$

* $v_z \equiv \dot{z}$

* $\omega \equiv \frac{\pi^2 a^4 C^2}{MR}$

$$\dot{v}_z = -\omega v_z - g$$

Solución homogénea

$$\dot{v}_h + \omega v_h = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_h(t) = A_1 e^{-\omega t}}$$

Solución particular

$$\dot{v}_p + \omega v_p = -g$$

Ansatz

$$v_p = k \longrightarrow cte$$

Reemplazando

$$\omega k = -g$$

$$k = -g/\omega \Rightarrow \boxed{v_p = -g/\omega}$$

Solución general

$$v_z(t) = v_h + v_p$$

$$\boxed{v_z(t) = A_1 e^{-\omega t} - g/\omega}$$

Para t muy grande $e^{-\omega t} \approx 0$

$$\Rightarrow v_T = g/\omega$$

$$\boxed{v_T = \frac{-gMR}{\pi^2 a^4 C^2}}$$