FI2002-2 Electromagnetismo
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliar: Felipe Carrasco V.
Ayudantes: Matías Zúñiga & Omar Silva.

Auxiliar 5: Lorentz, Biot-Savart, Ampère, Faraday-Lenz.

16 de enero de 2025

P1. Si se tiene un cable infinito con por el cual fluye una corriente I_1, calcule la fuerza que experimenta un circuito rectangular de lados a, b y por el que fluye una corriente I_2, si este se encuentra situado a una distancia l del cable infinito, como se muestra en la Figura 1.

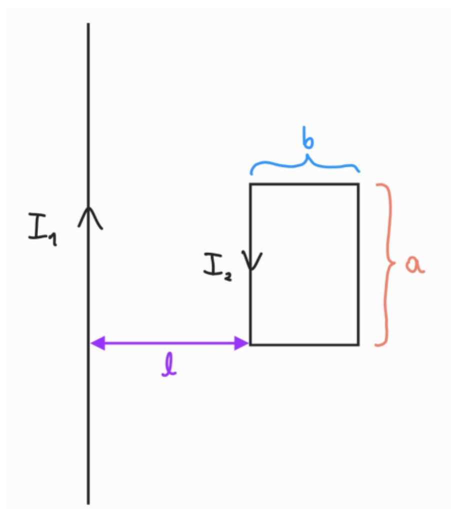

Figura 1.

P2. Dos alambres rectos y muy largos que se conectan a través de un semicírculo de radio R, según se muestra en la Figura 2, portan una corriente I. Encuentre el campo magnético en el punto A, ubicado en el centro de curvatura del semicírculo.

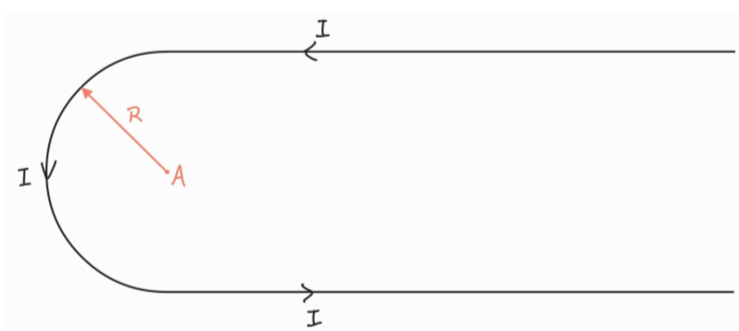

Figura 2.

P3. Dentro de una tubería metálica muy larga de radio a circula un fluido viscoso con una cierta densidad de carga. En los puntos al interior de la tubería se ha determinado que el campo magnético vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right)\hat{\varphi}$$

donde J_0 es una constante y r es la distancia al eje del cilindro. Determine

a) El vector densidad de corriente y la intensidad de corriente eléctrica dentro de la tubería.

b) El campo magnético fuera de la tubería.

c) El valor de la densidad superficial de corriente $\vec{K}$ que debe circular por el borde de la tubería para que el campo magnético en el exterior sea nulo (suponga que $\vec{K}$ se distribuye uniformemente por la superficie).

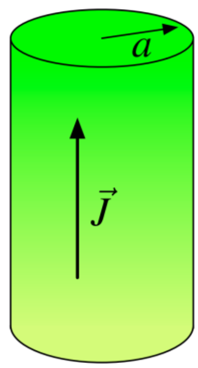

Figura 3: Tubería con fluido cargado.

P4. Una espira circular de radio a, masa M y resistencia R se deja caer desde $z = 0$ con su eje de simetría vertical en una zona donde el campo magnético es axialmente simétrico alrededor del eje z y cuya componente vertical es $B_z = Cz$. El eje de la espira coincide con el eje de simetría del campo.

a) ¿En qué dirección fluye la corriente en la espira mientras cae bajo la acción de la fuerza de gravedad?

b) Encuentre la corriente en la espira en función de la velocidad. Desprecie las contribuciones al flujo provenientes de la corriente inducida.

c) Determine las fuerzas que actúan sobre la espira provenientes axial y radial del campo magnético.

d) Encuentre la velocidad de la espira después que ha caído un largo tiempo.

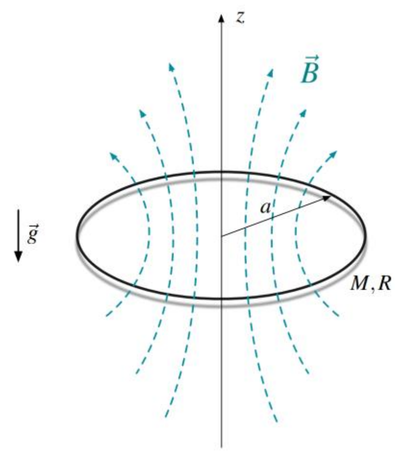

Figura 4.

Resumen

- **Fuerza de Lorentz:** La fuerza magnética que experimenta una carga puntual q que se encuentra en movimiento con velocidad $\vec{v}$ en presencia de un campo magnético externo $\vec{B}(\vec{r}')$ es

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Actualmente es más común llamar Fuerza de Lorentz a toda la fuerza electromagnética que puede actuar sobre una carga q, esto es

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})\right)$$

La fuerza magnética neta sobre una distribución de corriente volumétrica $\vec{J}$, en presencia de un campo magnético $\vec{B}$, será

$$\vec{F} = \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')\, dV'$$

En el caso de una distribución de corriente superficial se obtiene

$$\vec{F} = \int_S \vec{K}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')\, dS'$$

Y si se tiene una corriente I circulando a lo largo de una curva (abierta o cerrada) la fuerza magnética sobre el sistema es

$$\vec{F} = \int_\Gamma I d\vec{l}' \times \vec{B}(\vec{r}')$$

- **Campo magnético:** El campo magnético generado por una carga puntual q' en la posición $\vec{r}'$ que se mueve a velocidad $\vec{v}'$ es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q'\vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

- **Ley de Biot-Savart:** El campo magnético producido por una corriente de volumen, superficial o lineal es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}\, dV'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{K}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}\, dS'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I d\vec{l}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

- **Potencial vectorial:** El campo magnético puede escribirse como el rotor de un potencial vector conocido como $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$\vec{A}$ puede ser calculado como

$$\vec{A}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dV'$$

La fórmula para corrientes superficiales $\vec{K}$ y lineales I se extienden de manera análoga (casi igual que en Biot-Savart).

- **Ley de Ampère:** Para corrientes estacionarias ($\nabla \cdot \vec{J} = 0$) se cumple la denominada ley de Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Mediante el Teorema del Stokes se puede llegar a la expresión integral de la Ley de Ampère

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}$$

Donde la corriente enlazada se puede calcular como

$$I_{enl} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

siendo S la superficie cuyo borde corresponde al camino Γ. Lo que nos dice esta ley es que el trabajo que realiza el campo magnético $\vec{B}$ (generado por una corriente $\vec{J}$) a lo largo de un camino <u>cerrado</u>, es proporcional al flujo de corriente que pasa a través de la superficie que dicho camino delimita.

De manera similar a la Ley de Gauss, la Ley de Ampère se cumple siempre, pero solo es útil para determinar un campo magnético en sistemas donde existe **simetría**. Los casos más comunes son:

1. Alambres/cilindros infinitos con corriente.
2. Planos infinitos con corriente.
3. Bobinas infinitas (también llamadas solenoides).
4. Bobinas toroidales.

Para casos de esferas con corriente, la Ley de Ampère NO es útil en la gran mayoría de casos (hasta donde sé, ningún problema de esferas con corriente es resoluble mediante Ley de Ampère).

- **Torque:** El torque que experimenta un circuito filiforme cerrado por cual circula una corriente I, y que está inmerso en un campo magnético externo $\vec{B}$ es:

$$\tau = \oint_{\Gamma} \vec{r} \times \left(I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) \right)$$

- **Ley de Faraday-Lenz:** Esta ley experimental establece que la fuerza electromotriz (fem), la cual puede entenderse como la diferencia de potencial V, en un circuito cerrado es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donde Φ corresponde al flujo de campo magnético a través de la superficie delimitada por el circuito, este puede ser calculado como

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Esta ley, es conocida como la tercera ecuación de Maxwell, y puede ser escrita de forma diferencial como:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Mientras que, en virtud del Teorema del Rotor, se puede llegar a la forma integral de esta ley

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

donde Γ corresponde al borde de la superficie S. En general, la orientación de Γ **o** S se puede escoger de forma arbitraria, pero una vez elegimos la orientación de uno, la orientación del otro quedará determinada por la regla de la mano derecha.

El signo menos fue introducido por Heinrich Lenz y representa que la **corriente inducida** en un circuito debido a la variación temporal del flujo de $\vec{B}$ siempre se **opone** al crecimiento/decrecimiento de este.