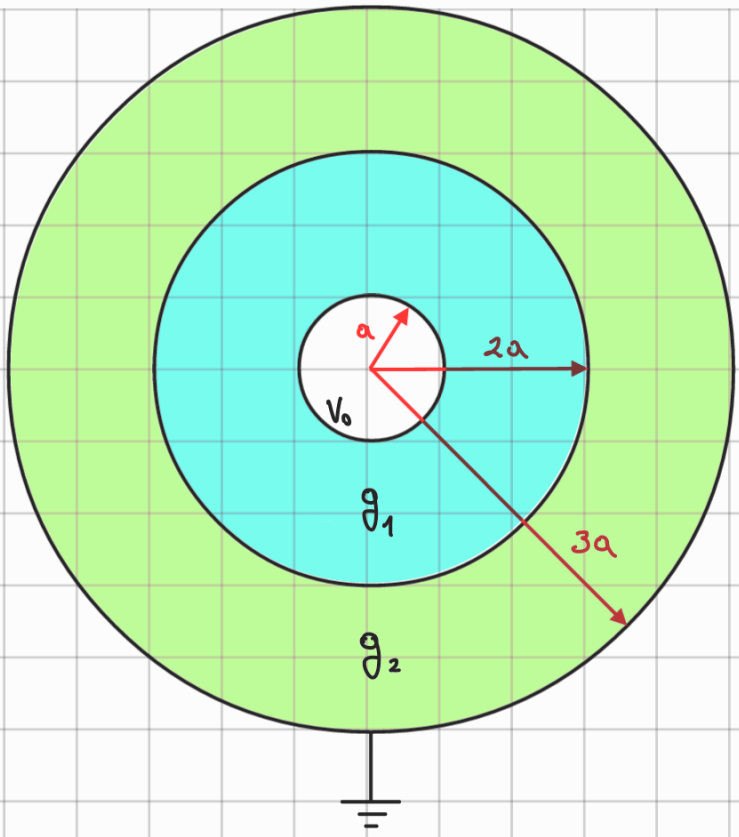
P1



a)

Por los argumentos de simetría usuales, sabemos que

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r} \Rightarrow \vec{J} = J(r)\,\hat{r}$$

($\vec{J} = \rho \vec{E}$)

Ahora usemos condiciones de borde. Sabemos que en el estado estacionario se cumple que

$$J_2^{\perp} - J_1^{\perp} = 0 \Rightarrow J_2^{\perp} = J_1^{\perp}$$

Por otro lado, en la interfaz entre los materiales conductores, el campo únicamente es perpendicular a esta (pues el campo es radial), es decir que en la interfaz se cumple

$$J_1^{\parallel} = J_2^{\parallel} = 0 \Rightarrow J_{1,2}^{\perp} = \vec{J}_{1,2}$$

Pero la condición de borde anterior nos decía que

$$J_2^{\perp} = J_1^{\perp}$$

por lo tanto

$$\vec{J}_2 = \vec{J}_1$$

$$\rho_2 \vec{E}_2 = \rho_1 \vec{E}_1$$

Es decir, la densidad de corriente es igual en ambos conductores. Y por la Ley de Ohm local $\vec{J} = g\vec{E}$ tendremos que **E** será distinto en cada conductor, pues **E** depende de *g*, la cual es diferente en cada medio, es decir

$$\vec{E} = \begin{cases} E_1(r)\hat{r} & r \in (a, 2a) \\ E_2(r)\hat{r} & r \in (2a, 3a) \end{cases}$$

Ahora calculamos la intensidad de corriente. Recordemos que esta corresponde al flujo de corriente en el sistema, como en en este caso **J** es radial, calculamos su flujo a través de una superficie esférica de radio $r \in (a, 3a)$

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \vec{J}(r)\hat{r} \cdot \hat{r}\, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$I = 4\pi r^2 J(r)$$

Ahora podemos escribir **J** en función de I

$$\vec{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Y mediante Ley de Ohm local

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{I}{4\pi g_1 r^2}\hat{r} & r \in (a, 2a) \\ \frac{I}{4\pi g_2 r^2}\hat{r} & r \in (2a, 3a) \end{cases}$$

Ahora para determinar I, debemos encontrar una relación entre esta y el potencial.
Recordemos que

$$\Delta V = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow V(r=a) - V(r=3a) = -\int_{3a}^{a} \vec{E} \cdot \hat{r}\, dr$$

$$V_0 = \int_a^{3a} \vec{E} \cdot \hat{r}\, dr \overset{*}{=} \int_a^{2a} \frac{I}{4\pi g_1 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r}\, dr + \int_{2a}^{3a} \frac{I}{4\pi g_2 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r}\, dr$$

$$= \frac{I}{4\pi g_1} \int_a^{2a} \frac{dr}{r^2} + \frac{I}{4\pi g_2} \int_{2a}^{3a} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{I}{4\pi g_1} \left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_a^{2a} + \frac{I}{4\pi g_2} \left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_{2a}^{3a}$$

$$= \frac{I}{4\pi g_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right) + \frac{I}{4\pi g_2} \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a}\right)$$

$$= \frac{I}{4\pi a} \left[\frac{1}{g_1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{g_2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{I}{4\pi a} \left[\frac{1}{2g_1} + \frac{1}{6g_2}\right]$$

$$V_0 = \frac{I}{24\pi a} \left(\frac{3}{g_1} + \frac{1}{g_2}\right)$$

Finalmente por la Ley de Ohm

$$V = IR \Rightarrow R = \frac{V}{I} = \frac{V_0}{I}$$

$$= \frac{\frac{I}{24\pi a}\left(\frac{3}{g_1} + \frac{1}{g_2}\right)}{I}$$

$$= \frac{1}{24\pi a}\left(\frac{3}{g_1} + \frac{1}{g_2}\right)$$

$$\boxed{R = \frac{3g_2 + g_1}{24\pi a g_1 g_2}}$$

b)

Para esta parte debemos recordar que

$$D_2^{\perp} - D_1^{\perp} = \sigma_1$$

Como ambos medios tiene permitividad ε_0 podemos reemplazar haciendo uso de $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 E_2^{\perp} - \varepsilon_0 E_1^{\perp} = \sigma_1 \quad (*)$$

Recordemos que

$$\vec{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Y como ya conocemos *R*, podemos despejar I

$$R = \frac{3g_2 + g_1}{24\pi a g_1 g_2} = \frac{V_0}{I} \Rightarrow I = \frac{24\pi V_0 a g_1 g_2}{3g_2 + g_1}$$

$$\vec{J}(r) = \frac{24\pi V_0 a g_1 g_2}{4\pi(3g_2 + g_1)} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{J}(r) = \frac{6 V_0 a g_1 g_2}{(3g_2 + g_1) r^2} \hat{r} \qquad r \in (a, 3a)$$

$$\vec{J} = g\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{6 V_0 a g_2}{(3g_2 + g_1) r^2} \hat{r}; & r \in (a, 2a) \\ \dfrac{6 V_0 a g_1}{(3g_2 + g_1) r^2} \hat{r}; & r \in (2a, 3a) \end{cases}$$

Como **E** es radial, este ya es perpendicular a la interfaz entre conductores, o sea

$$E^{\perp}_{1,2} = \vec{E}_{1,2}$$

Por lo que Ahora podemos despejar σ_l evaluando ambos campos en el borde y usando la condición de borde (*)

$$\frac{\varepsilon_0 6 V_0 a g_1}{(3g_2 + g_1)(2a)^2} - \frac{\varepsilon_0 6 V_0 a g_2}{(3g_2 + g_1)(2a)^2} = \sigma_l$$

$$\sigma_l = \frac{\varepsilon_0 6 V_0 a g_1}{(3g_2 + g_1) 4a^2} - \frac{\varepsilon_0 6 V_0 a g_2}{(3g_2 + g_1) 4a^2} = \frac{\varepsilon_0 3 V_0 g_1}{(3g_2 + g_1) 2a} - \frac{\varepsilon_0 3 V_0 g_2}{(3g_2 + g_1) 2a}$$

$$= \frac{V_0 \varepsilon_0}{(3g_2 + g_1) a} \left(\frac{3g_1}{2} - \frac{3g_2}{2} \right)$$

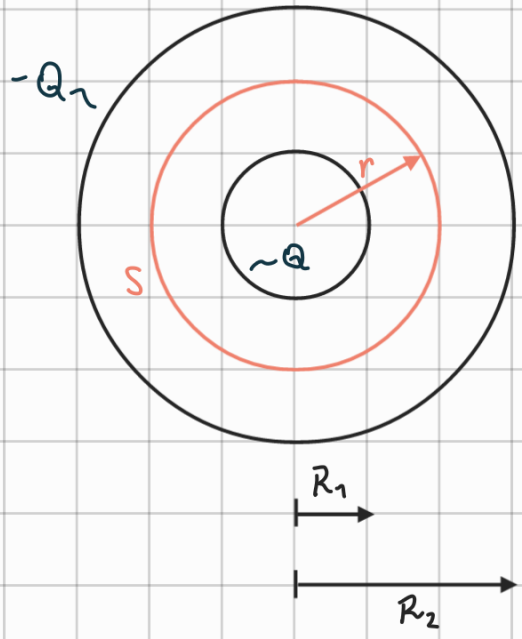
$$\boxed{\sigma_l = \frac{3 V_0 \varepsilon_0 (g_1 - g_2)}{2a(3g_2 + g_1)}}$$

P2

Aunque en este problema desconocemos las cargas presentes en los cilindros, podemos asumir que estos poseen alguna carga Q para trabajar el problema, después este valor no deberá aparecer en la capacitancia, pues esta no depende de la carga.

Para el primer condensador supondremos que el cilindro interior tiene carga total Q (mientras que el exterior tendrá carga $-Q$). De esta manera podemos usar la Ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico dentro del condensador.

Vista aérea



Por los argumentos de simetría de siempre, sabemos que

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

Lo que nos permite usar Gauss con la superficie cilíndrica S del dibujo.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Como ya dijimos que la carga total del cilindro interior es Q, entonces

$$\boxed{Q_{enc} = Q}$$

Ahora calculamos el lado derecho. Recordando que no existirá flujo sobre las tapas del cilindro, solo nos queda el flujo sobre el manto

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}\cdot\hat{r}\, r\, d\varphi\, dz$$

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi r E(r)}$$

Reemplazando en Gauss

$$2\pi r L E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}_1(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}\hat{r}}$$

Ahora calculamos la diferencia de potencial entre las placas

$$\Delta V = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Como $\vec{E}$ es radial, podemos escoger $d\vec{l} = \hat{r}\,dr$

$$\Delta V = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}\hat{r}\cdot\hat{r}\, dr$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln(r)\Big|_{R_2}^{R_1}$$

$$= \frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln(r)\Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln(R_2/R_1)$$

$$C = Q/\Delta V$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}}$$

Fijémonos en que ahora podemos realizar exactamente el mismo procedimiento para el segundo condensador, el único cambio es el radio de los cilindros

$R_1 \longrightarrow R_3$

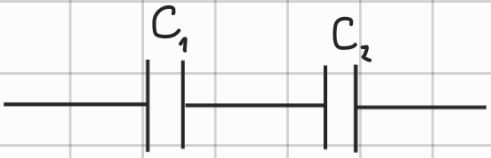
$R_2 \longrightarrow R_4$

Por lo que la segunda capacitancia es

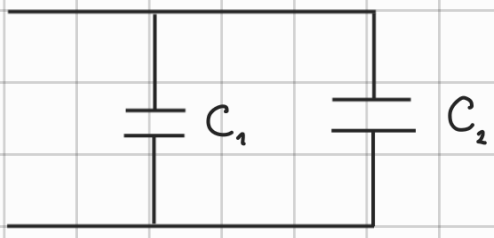
$$\boxed{C_2 = \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln(R_4/R_3)}}$$

Ahora para conocer la capacitancia equivalente, necesitamos saber si estos condensadores se encuentran conectados en serie o en paralelo

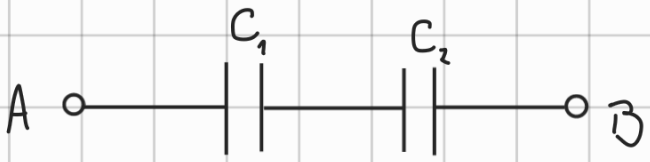
Condensadores en serie



Condensadores en paralelo



Notemos que el cable que une los condensadores conecta el cilindro exterior con el otro cilindro exterior, mientras que los cilindros interiores se encuentran conectados a las terminales del circuito, o sea que tenemos algo como esto



Es decir, los condensadores están en serie.
Ahora la capacitancia equivalente se calcula como

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi L \varepsilon_0} + \frac{\ln(R_4/R_3)}{2\pi L \varepsilon_0}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{\ln\left(\frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}\right)}{2\pi L \varepsilon_0}\right)^{-1}$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}\right)}}$$