**FI2002-2 Electromagnetismo**
**Profesor:** Ignacio Andrade S.
**Auxiliar:** Felipe Carrasco V.
**Ayudante:** Matías Zúñiga S.

# Auxiliar 4: Capacitancia, conductores, corriente y zzzircuitos 😴

9 de enero de 2025

**P1.** Entremedio de dos cascarones metálicos hay dos materiales dieléctricos de permitividades $\varepsilon_1$ y $\varepsilon_2$ dispuestos como se muestra en la Figura 1. El cascarón interior tiene carga total $Q$ y radio $a$, mientras que el cascarón exterior tiene radio $b$ y carga total $-Q$.

a) Calcule el campo eléctrico en el espacio entre los cascarones.

b) Determine $\vec{D}$ y $\vec{P}$ entre las placas.

c) Encuentre la capacitancia del sistema.

d) Calcule la energía del condensador.

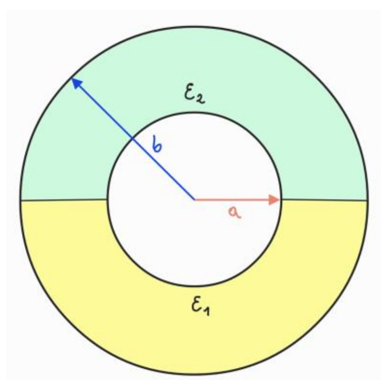


Figura 1.

**P2.** Dos cavidades esféricas de radios $a$ y $b$ son perforadas al interior de una esfera conductora no cargada de radio $R$. Al centro de cada cavidad se coloca una carga puntual $q_a$ y $q_b$ respectivamente.

a) Encuentre las densidades de carga superficiales $\sigma_a$, $\sigma_b$ y $\sigma_R$.

b) ¿Cuál es el campo fuera del conductor?

c) ¿Cuál es el campo dentro de cada cavidad?

d) ¿Cuál es la fuerza sobre $q_a$ y $q_b$?

e) ¿Cuál de estas respuestas cambiaría si colocásemos una tercera carga $q_c$ cerca del conductor?

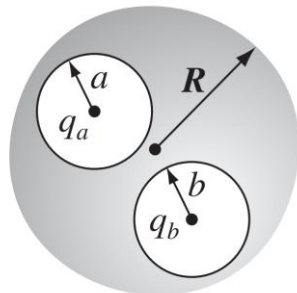


Figura 2: Esfera conductora con cavidades.

**P3.** Entre dos placas conductoras de radio $a$ existe una barra conductora cilíndrica de radio $a$, longitud $L$, permitividad $\varepsilon_0$ y conductividad $g(y) = g_0(1 + y/L)$ . Si se aplica un potencial $V_0$ entre las placas:

a) Calcular la densidad de corriente $\vec{J}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$ dentro de la barra.

b) Calcular la potencia disipada en un disco de espesor $h$ cuyo centro está situado justo en la mitad del conductor.

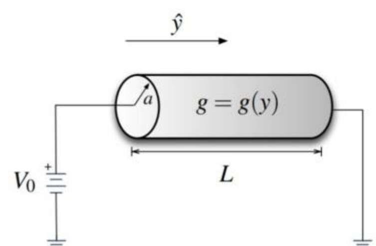


Figura 3.

**P4.** Considere el circuito de la Figura 4, ambos extremos están conectados a una diferencia de potencial $V$. Si la corriente que ingresa al sistema es $I$ (desconocida) y las resistencias son las de la figura, calcule la intensidad de corriente que atraviesa a cada una de las resistencias.

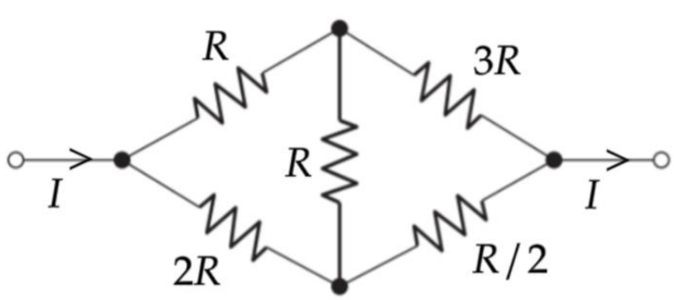


Figura 4: Zzzircuito.

**P5.** Considere el circuito de la Figura 5. Antes de $t = 0$, el switch está en la posición 1 por un tiempo muy prolongado. En $t = 0$, el switch es movido a la posición 2. Calcule:

a) La carga en el condensador $Q(t = 0)$.

b) La energía almacenada en el condensador en $t = 0$.

c) La corriente para $t > 0$ después de que el switch fue movido a la posición 2.

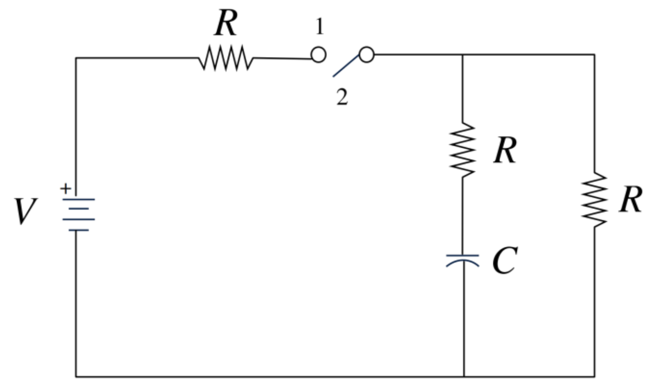


Figura 5: Circuito no tan fome.

# Resumen

- **Conductores:** Son materiales que tienen la capacidad de reorganizar sus cargas internas en respuesta a un campo eléctrico externo, generando así un campo de igual magnitud, pero en dirección contraria, lo que resulta en su anulación. De esta forma, se cumplen lo siguiente:

    1. $\vec{E} = 0$ al interior del material, y en consecuencia $\rho = 0$.
    2. Es un equipotencial, o sea, todos los puntos al interior están al mismo potencial.
    3. La totalidad de la carga se acumula en las superficies, generando un campo siempre perpendicular a esta, con valor $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$, donde $\hat{n}$ es la normal exterior.

- **Condensadores:** Son dispositivos capaces de almacenar energía en forma de campo eléctrico, los cuales están conformados por dos o más conductores en forma arbitraria. La expresión de la capacidad (o capacitancia) está dada por:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

  con $Q$ la carga acumulada en la superficie de los conductores y $\Delta V$ la diferencia de potencial entre estos.

  Los condensadores pueden ser conectados en serie o en paralelo (similar a las resistencias en métodos experimentales), de aquí se pueden obtener las capacitancias equivalentes como:

$$C_{serie} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}\right)^{-1} \qquad C_{paralelo} = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

- **Energía en condensadores:** La energía acumulada en un condensador formado por dos conductores de cargas $Q$ y $-Q$, a una diferencia de potencial $\Delta V$ puede calcularse como:

$$U = \frac{Q\Delta V}{2} = \frac{C\Delta V^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

- **Corriente:** Se define la corriente como el flujo de carga eléctrica que atraviesa un material. Matemáticamente, será la cantidad de carga $dQ$ que atraviesa una sección transversal de un conductor en un tiempo $dt$, tal que:

$$I = \pm\frac{dQ}{dt}$$

  Se introduce el vector densidad de corriente $\vec{J}$ (volumétrica) o $\vec{K}$ (superficial) tal que la corriente $I$ queda caracterizada como:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_l \left(\vec{K} \times \hat{n}\right) \cdot d\vec{l}$$

  donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie donde circula la corriente.

- **Ecuación de continuidad:** Establece un equilibrio entre la carga que se encuentra circulando y acumulando en un mismo sistema. Matemáticamente:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- **Ley de Ohm:** Establece que la corriente que fluye a través de un material es directamente proporcional al potencial al que se encuentra sometido e inversamente proporcional a su resistencia. Así se tiene la relación:

$$V = IR$$

Por otra parte, existe también la denominada Ley de Ohm local que establece que el vector densidad de corriente de un material es proporcional al campo eléctrico dentro de este, relacionados por un parámetro del material conocido como conductividad el cual cuantifica que tan difícil es para la corriente circular por él. Luego la relación será:

$$\vec{J} = g\vec{E}$$

- **Resistencia caso general:** Se define la resistencia eléctrica $R$ de un conductor a través de la relación $V = IR$. Esta cantidad es función de la geometría del sistema y de la conductividad. De manera general, la resistencia es

$$R = \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int g\vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

- **Condiciones de borde para $\vec{J}$:** Sean dos medios con conductividades $g_1$ y $g_2$. Las siguientes relaciones se cumplen en la interfaz:

$$\hat{n} \cdot \left(\vec{J}_2 - \vec{J}_1\right) = -\frac{\partial \sigma_l}{\partial t} \iff J_2^{\perp} - J_1^{\perp} = -\frac{\partial \sigma_l}{\partial t}$$

$$\hat{n} \times \left(g_2\vec{J}_1 - g_1\vec{J}_2\right) = 0 \iff g_2 J_1^{\parallel} = g_1 J_2^{\parallel}$$

donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie en la interfaz. En el estado estacionario, la primera relación se transforma en:

$$J_2^{\perp} - J_1^{\perp} = 0$$

- **Pérdidas por efecto Joule:** También conocida como potencia disipada, corresponde al fenómeno donde si por un conductor circula una corriente eléctrica, parte de la energía se transforma en calor. Está dada por la expresión:

$$P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}\, dV$$

- **Potencia disipada:** Para una resistencia $R$ sobre la que circula una corriente $I$ y se encuentra sometida a una tensión $V$, la potencia disipada será:

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = I^2 R$$

- **Conexión en serie:** El nodo de salida de una resistencia es el de entrada de la siguiente.

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

- **Conexión en paralelo:** Las resistencias poseen los mismos nodos de entrada y de salida.

$$R_{eq} = \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$$

- **LVK:** La ley de voltaje de Kirchhoff establece que la suma de los voltajes en una malla cerrada (o bucle) es siempre cero.

$$\sum_{bucle} V_n = 0$$

- **LCK:** La ley de corriente de Kirchhoff establece que la suma de las corrientes que entran y salen de un nodo es siempre cero. En otras palabras, lo que entra es igual a lo que sale.

$$\sum_{nodo} I_n = 0$$