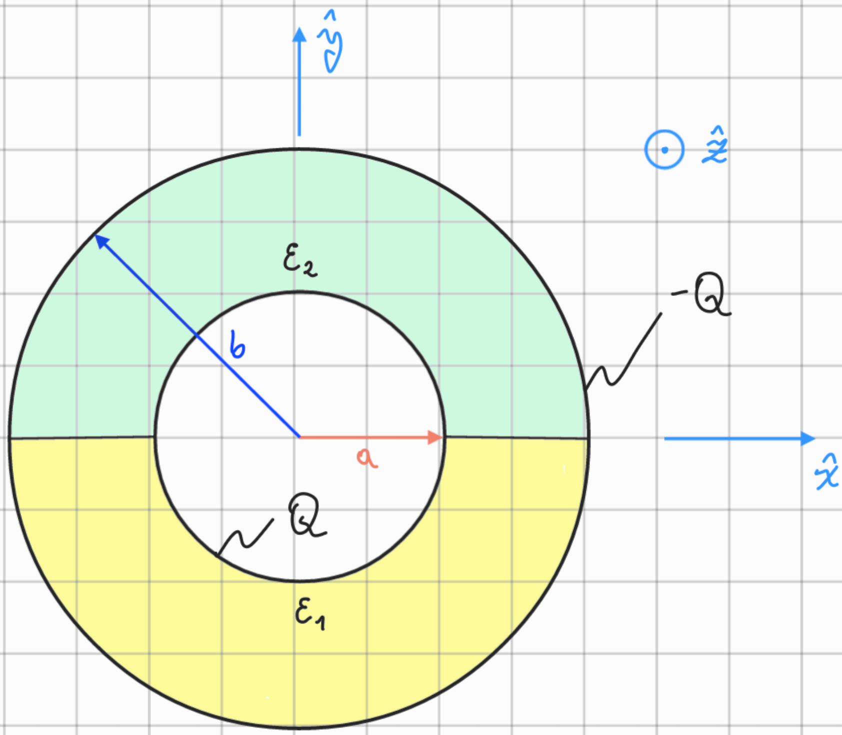
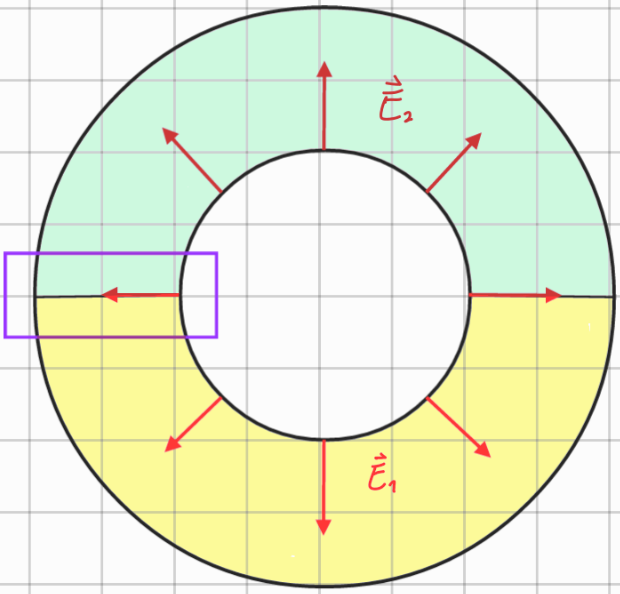
P1



a)

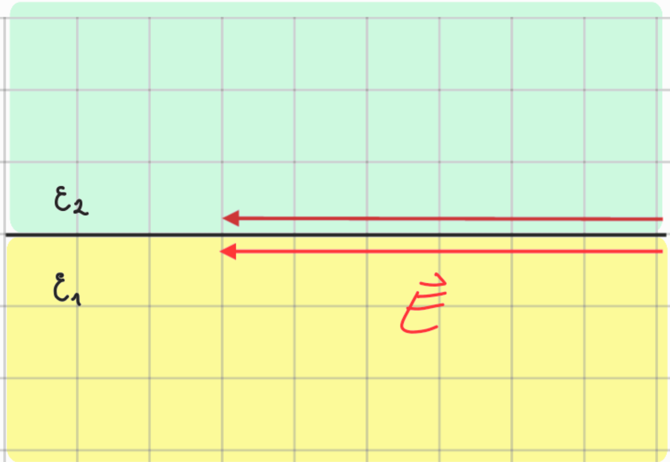
Por la simetría, el campo que genera el cascarón interior deberá ser radial



$\vec{E}_2 = E_2(r)\,\hat{r}$

$\vec{E}_1 = E_1(r)\,\hat{r}$

Así podemos notar que el campo eléctrico en la interfase entre los dieléctricos es tangencial a esta.
Haciendo "zoom" en la parte encerrada en morado veríamos lo siguiente



Por las condiciones de borde tenemos que

$$E_2^{\parallel} - E_1^{\parallel} = 0 \Rightarrow E_2^{\parallel} = E_1^{\parallel}$$

$$D_2^{\perp} - D_1^{\perp} = \sigma_l$$

Como los dieléctricos no están cargados, no existe carga libre, es decir

$$\sigma_l = 0 \Rightarrow D_2^{\perp} = D_1^{\perp} \Rightarrow \varepsilon_2 E_2^{\perp} = \varepsilon_1 E_1^{\perp}$$

Pero el campo eléctrico es tangencial a la interfase

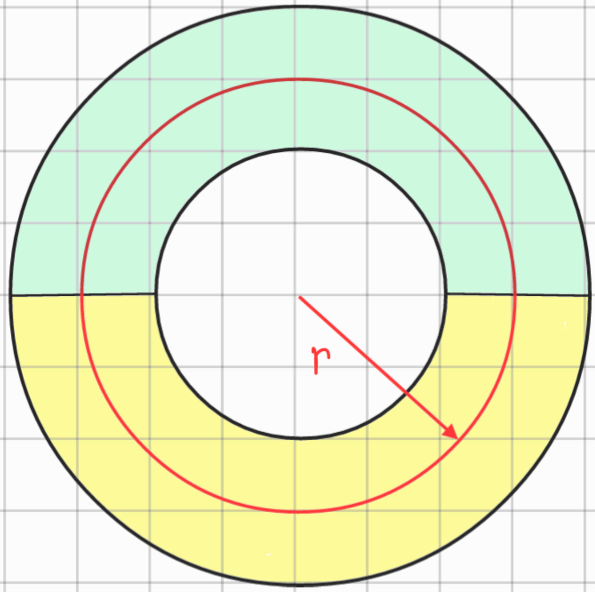
$$\Rightarrow E_2^{\perp} = E_1^{\perp} = 0 \quad y \quad \vec{E}_{1,2} = E_{1,2}^{\parallel} \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

E será el mismo en ambos dieléctricos, pero el vector desplazamiento será distinto en cada uno, esto es

$$\vec{D} = \begin{cases} D_2(r)\,\hat{r} & \varphi \in (0, \pi) \\ D_1(r)\,\hat{r} & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Así entonces, podemos usar la Ley de Gauss para obtener el campo eléctrico

Colocamos nuestra superficie imaginaria, en este caso una esfera de radio r tal que $a < r < b$



La Ley de Gauss para materiales dieléctricos nos dice que

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q^{(l)}_{inc}$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} D(r,\varphi)\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}\, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = Q^{(l)}_{inc}$$

$$2r^2 \int_0^{2\pi} D(r,\varphi)\, d\varphi = Q^{(l)}_{inc}$$

$$2r^2\left[\int_0^{\pi} D_2(r)\,d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} D_1(r)\,d\varphi\right] = Q_{enc}^{(l)}$$

$$2r^2\left[\pi D_2(r) + \pi D_1(r)\right] = Q_{enc}^{(l)}$$

$$2\pi r^2 \left(D_2 + D_1\right) = Q_{enc}^{(l)}$$

Por el enunciado sabemos que el conductor interior tiene una carga libre Q, y como nuestra superficie gaussiana encierra toda esta carga tenemos que $Q_{enc}^{(l)} = Q$

$$\Rightarrow 2\pi r^2 \left(D_2 + D_1\right) = Q$$

$$D_2 + D_1 = \frac{Q}{2\pi r^2}$$

Dado que los dieléctricos son lineales, sabemos que se cumple $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$$\Rightarrow D_2 = \varepsilon_2 E \ ; \qquad D_1 = \varepsilon_1 E$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 E + \varepsilon_1 E = \frac{Q}{2\pi r^2}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q\,\hat{r}}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}}$$

b)

Nuevamente usamos que $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$$\boxed{\vec{D} = \begin{cases} \dfrac{Q \varepsilon_2 \hat{r}}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} & \varphi \in (0, \pi) \\ \\ \dfrac{Q \varepsilon_1 \hat{r}}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases}}$$

Para obtener $\vec{P}$ utilizaremos la definición del vector desplazamiento $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{P} = \begin{cases} \dfrac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\hat{r}}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} & \varphi \in (0, \pi) \\ \\ \dfrac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\hat{r}}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases}}$$

c)

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$\Delta V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{Q \hat{r}}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \hat{r}\, dr = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \cdot \frac{-1}{r}\Bigg|_a^b = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

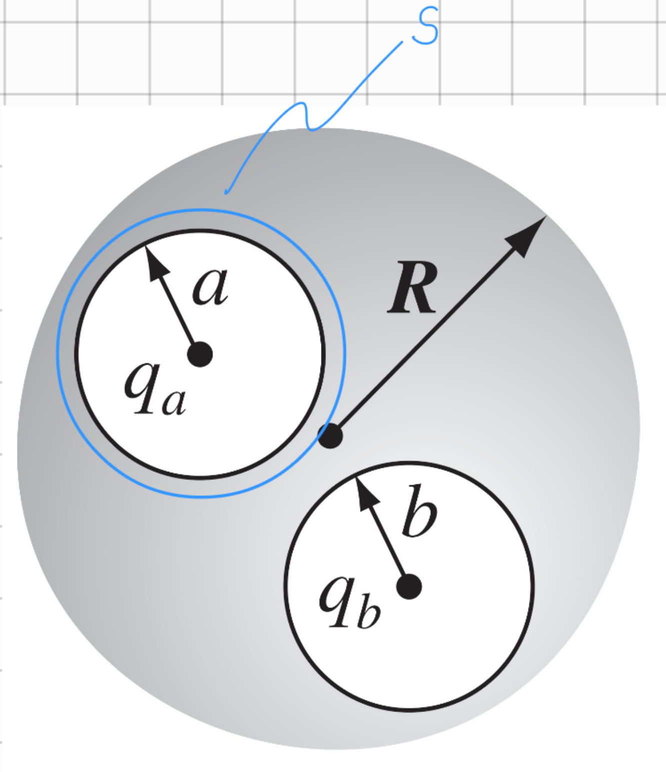
$$\Delta V = \frac{Q(b-a)}{2\pi ab(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi ab(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{b-a}}$$

P_2

a)

Para encontrar σ_a encerramos la cavidad donde se encuentra q_a con una superficie esférica ***S*** imaginaria



La Ley de Gauss nos dice que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Ahora, la presencia de la carga q_a inducirá una carga sobre la superficie de la cavidad, por lo que la carga encerrada por nuestra superficie imaginaria será

$$Q_{enc} = q_a + q_{inducida}$$

Por otro lado, sabemos que el campo eléctrico dentro del conductor debe ser cero, de forma que si midiéramos el campo en la superficie imaginaria que colocamos, veríamos que el campo es 0 sobre toda esta superficie, por lo que no puede haber flujo de campo eléctrico atravesándola

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Y por la Ley de Gauss

$$0 = q_a + q_{inducida}$$

$$\Rightarrow q_{inducida} = -q_a$$

Debido a que la carga q_a se encuentra justo en el centro de la cavidad, la carga inducida se distribuirá de forma uniforme sobre esta, por lo tanto

$$\sigma_a = \frac{-q_a}{A_a}$$

Donde A_a corresponde al área de la cavidad, y debido la cavidad es una esfera de radio a

$$\boxed{\sigma_a = \frac{-q_a}{4\pi a^2}}$$

De forma totalmente análoga podremos encontrar que

$$\boxed{\sigma_b = \frac{-q_b}{4\pi b^2}}$$

Ahora vamos con σ_R. Sabemos que el conductor tiene una carga total nula, por lo que la carga inducida en su superficie exterior deberá corresponder a menos la carga inducida sobre la superficie de las cavidades en su interior, en otras palabras

$$Q_{total} = 0 \implies q_{\substack{\text{inducida en}\\ \text{el interior}}} + q_{\substack{\text{inducida en}\\ \text{el exterior}}} = 0$$

$$q_{\substack{\text{inducida en}\\ \text{el exterior}}} = -q_{\substack{\text{inducida en}\\ \text{el interior}}}$$

Y gracias a lo que realizamos antes ya conocemos la carga inducida en el interior del conductor

$$q_{\substack{\text{inducida en}\\ \text{el exterior}}} = -\left(-q_a - q_b\right)$$

$$q_{\substack{\text{inducida en}\\ \text{el exterior}}} = q_a + q_b$$

La densidad de carga inducida en la parte exterior de la esfera se distribuirá de manera uniforme, pues la influencia asimétrica de una de las cargas *q* se verá cancelada por la distribución de carga -*q* sobre la superficie de la cavidad (si le cuesta entender esta explicación, intente quedarse con la idea de que el campo en la superficie exterior del conductor se distribuye de manera uniforme), por lo tanto

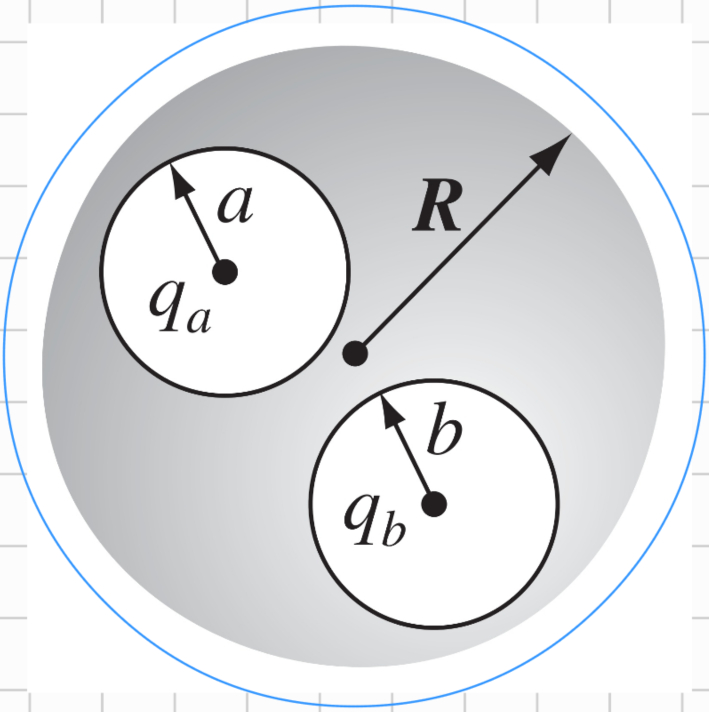
$$\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{A_R}$$

Donde A_R al área de la superficie exterior del conductor, y debido a que este es una esfera

$$\boxed{\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}}$$

b)

Empezamos encerrando todo el conductor con una superficie imaginaria



Dado que el conductor posee carga total nula, la carga encerrada corresponderá únicamente a las cargas puntuales, es decir

$$Q_{enc} = q_a + q_b$$

Por otro lado, sabemos que la carga se encuentra distribuida uniformemente sobre el conductor, de modo que si diésemos vueltas alrededor de este (a una distancia fija de su centro) seguiríamos viendo lo mismo todo el tiempo, por lo que el campo eléctrico no puede tener dependencías de φ ni θ, además de no tener componentes angulares, por lo tanto el campo eléctrico tiene la siguiente forma

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$$

Ahora aplicamos la Ley de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E(r)\,\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}\,r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{q_a + q_b}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)r^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{q_a + q_b}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\,4\pi r^2 = \frac{q_a + q_b}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{q_a + q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Y por los argumentos de simetría

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{q_a + q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$

c)

Dado que en las cavidades existe espacio vacío, dentro de estas existirá el campo generado por las cargas puntuales en su interior. Además, los conductores aíslan eléctricamente el espacio que se encuentre dentro de ellos, por lo que dentro de las cavidades solo podrá existir el campo eléctrico generado por las cargas presentes en dicha cavidad, o sea, dentro de la cavidad en la que se encuentra q_a solo existirá el campo generado por q_a, el campo que genere cualquier otra carga fuera de esta cavidad no podrá penetrar en ella. De manera análoga, en la cavidad donde está q_b solo existirá el campo que genera esta misma carga, por lo tanto:

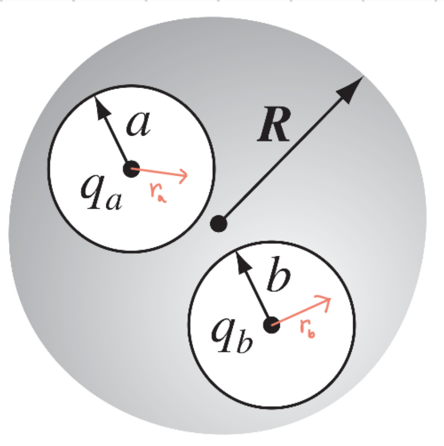
El campo en la cavidad donde se encuentra q_a es

$$\boxed{\vec{E}_a = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 r_a^2}\hat{r}_a}$$

donde r_a mide la distancia desde el centro de la cavidad y $\hat{r}_a$ es el vector unitario asociado al sistema de referencia centrado en el medio de la cavidad.

Similarmente el campo donde está la carga q_b es

$$\boxed{\vec{E}_b = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 r_b^2}\hat{r}_b}$$



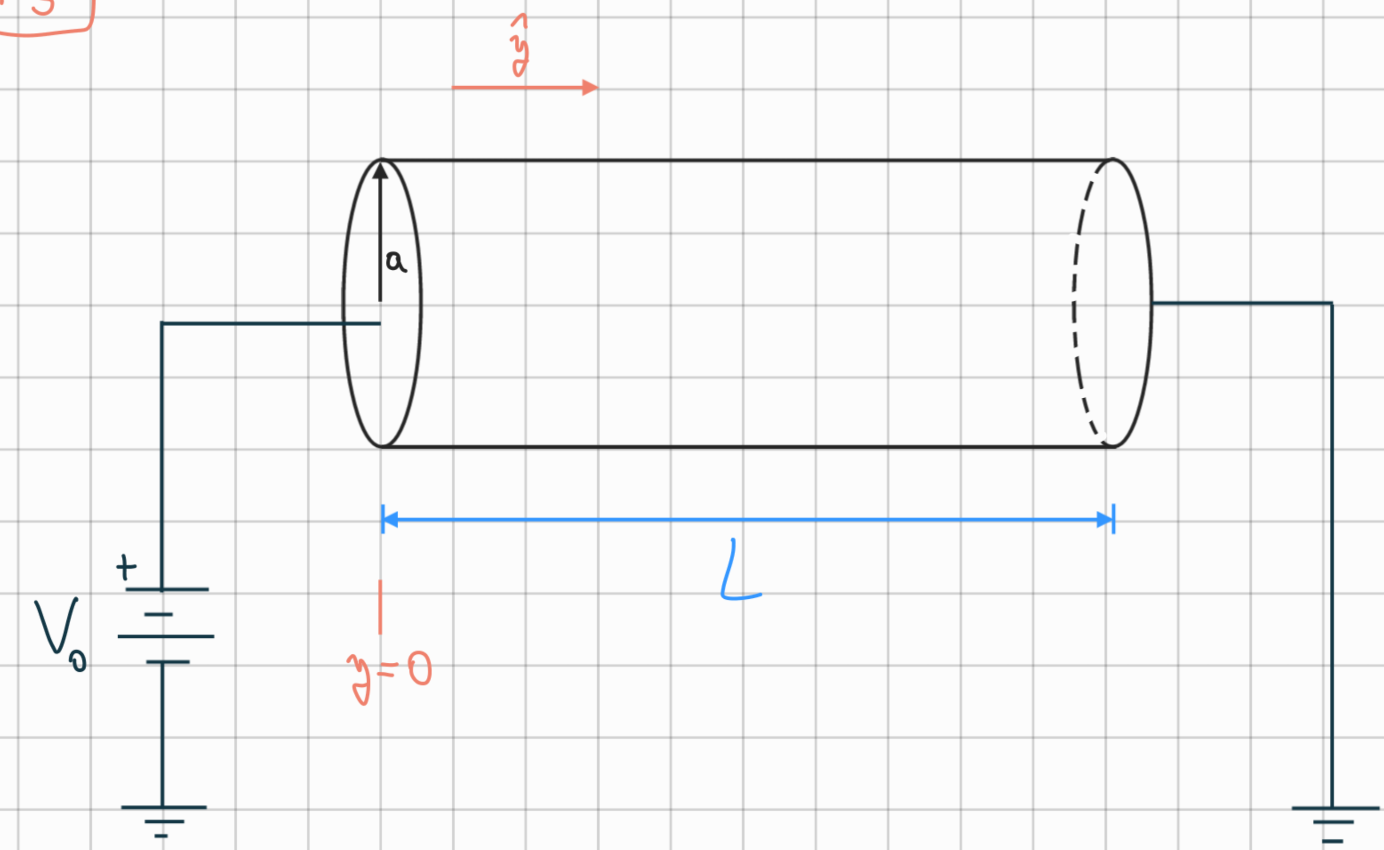
d)

Dado que el conductor aísla eléctricamente a q_a y q_b, ninguna de estas cargas "siente" a la otra, y debido a que ambas se encuentran en el centro de su respectiva cavidad al mismo tiempo que la densidad de carga inducida se distribuye uniformemente sobre su superficie, las cargas no experimentarán ninguna fuerza.

e)

Añadir una tercera carga al sistema inmediatamente haría que el campo fuera del conductor cambiase, lo que al mismo tiempo debe cambiar la distribución de carga superficial σ_R, dentro del conductor no cambia nada debido a que está eléctricamente aislado.

P3



a)

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Asumiendo el estado estacionario

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Por la simetría

$$\vec{E} = E(y)\,\hat{y}$$

Por la Ley de Ohm

$$\vec{J} = g\vec{E} \Rightarrow \vec{J} = J(y)\hat{y}$$

$$\underset{g(y)}{\downarrow}$$

$$\nabla\cdot\vec{J} = \cancel{\frac{\partial J_x}{\partial x}}^{\,0} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial J_z}{\partial z}}^{\,0} = \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{J} = C\hat{y}$$

Por ley de Ohm

$$C\hat{y} = g_0(1 + y/L)E(y)\hat{y} \quad /\cdot\hat{y}$$

$$C = g_0(1 + y/L)E(y)$$

$$\vec{E}(y) = \frac{C\hat{y}}{g_0(1 + y/L)}$$

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = V(0) - V(L) = V_0$$

$$\Rightarrow V_0 = -\int_L^0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_0 = \int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_0 = \int_0^L \frac{C \cancel{\hat{y}}}{g_0 (1 + y/L)} \cancel{\hat{y}} \, dy$$

$$= \frac{C}{g_0} \int_0^L \frac{dy}{(1 + y/L)}$$

C. V.

$u = 1 + y/L$

$du = \frac{dy}{L} \Rightarrow dy = L\,du$

$$= \frac{C}{g_0} \int_{a'}^{b'} \frac{L\,du}{u}$$

$$V_0 = \frac{CL}{g_0} \ln(u) \Big|_{a'}^{b'}$$

Revirtiendo el C.V.

$$V_0 = \frac{CL}{g_0} \ln\left(1 + y/L\right)\Big|_0^L$$

$$= \frac{CL}{g_0}\left[\ln\left(1 + \underbrace{\frac{L}{L}}_{1}\right) - \ln\left(1 + \underbrace{\frac{0}{L}}_{0}\right)\right]$$

$$= \frac{CL}{g_0}\left[\ln(2) - \cancelto{0}{\ln(1)}\right]$$

$$V_0 = \frac{CL}{g_0}\ln(2)$$

$$C = \frac{g_0 V_0}{L \ln(2)}$$

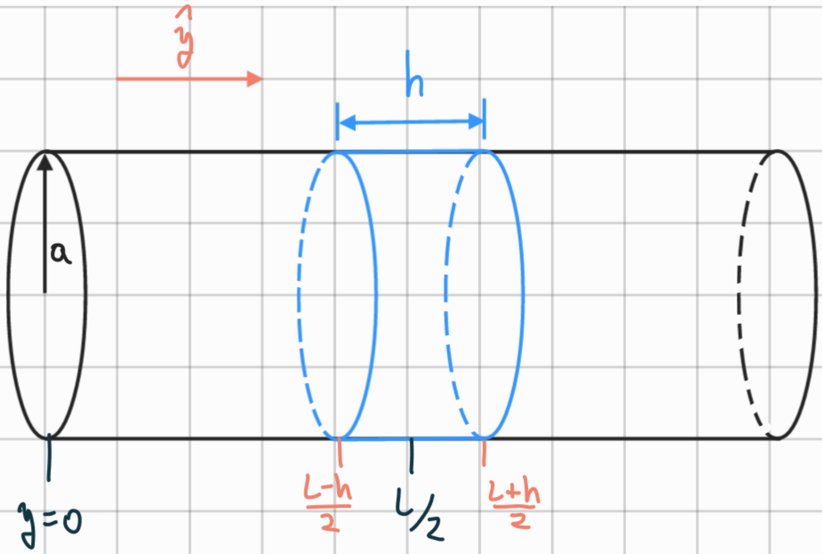
$$\Rightarrow \vec{E}(y) = \frac{\left(\frac{\cancel{g_0} V_0}{L \ln(2)}\right)\hat{y}}{\cancel{g_0}\left(1 + y/L\right)} = \frac{V_0\,\hat{y}}{L\ln(2)\left(1 + y/L\right)}$$

$$\boxed{\vec{E}(y) = \frac{V_0\,\hat{y}}{\ln(2)(L + y)}}$$

$$\vec{J} = g\vec{E} = g_0\left(1 + y/L\right)\frac{V_0\,\hat{y}}{\ln(2)(L+y)} = \frac{\cancel{(1 + y/L)}\,g_0 V_0\,\hat{y}}{\ln(2)\cdot L\cancel{(1 + y/L)}}$$

$$\boxed{\vec{J} = \frac{g_0 V_0\,\hat{y}}{L\ln(2)}}$$

b)



$$P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV$$

$$P = \int_{\frac{L-h}{2}}^{\frac{L+h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{V_0 \cancel{\hat{y}}}{\ln(2)(L+y)} \cdot \frac{g_0 V_0 \cancel{\hat{y}}}{L \ln(2)} \, r \, dr \, d\varphi \, dy$$

$$= \frac{g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \int_{\frac{L-h}{2}}^{\frac{L+h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{dy}{(y+L)} \, r \, dr \, d\varphi \, dy$$

$$= \frac{g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \cancel{2}\pi \frac{a^2}{\cancel{2}} \int_{\frac{L-h}{2}}^{\frac{L+h}{2}} \frac{dy}{(y+L)}$$

C.V.

$u = y + L$

$du = dy$

$$= \frac{g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \pi a^2 \int_{a'}^{b'} \frac{du}{u}$$

$$P = \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \ln(u) \Big|_{a'}^{b'}$$

Revertimos el C.V.

$$P = \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \ln(y + L) \Big|_{\frac{L-h}{2}}^{\frac{L+h}{2}}$$

$$= \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \left[\ln\left(\frac{L+h}{2} + L\right) - \ln\left(\frac{L-h}{2} + L\right) \right]$$

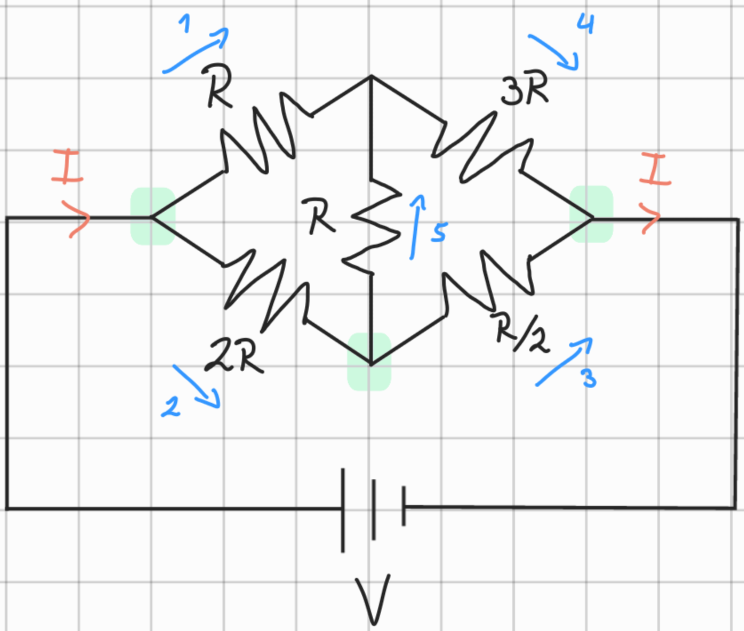
$$= \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \left[\ln\left(\frac{L+h+2L}{2}\right) - \ln\left(\frac{L-h+2L}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \left[\ln\left(\frac{3L+h}{2}\right) - \ln\left(\frac{3L-h}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \left[\ln\left(\frac{\left(\frac{3L+h}{\cancel{2}}\right)}{\left(\frac{3L-h}{\cancel{2}}\right)} \right) \right.$$

$$\boxed{P = \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \ln\left(\frac{3L + h}{3L - h}\right)}$$

P4



Aplicando la 1era Ley de Kirchoff en los nodos destacados obtenemos que:

$$I - I_1 - I_2 = 0 \qquad I_2 - I_3 - I_5 = 0$$

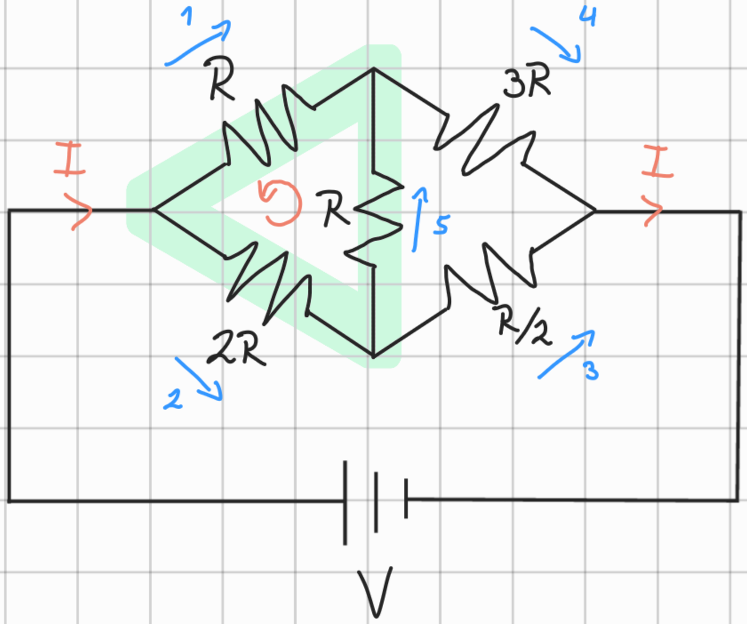
$$I_3 + I_4 - I = 0$$

Para aplicar la 2da Ley de Kirchoff necesitamos elegir ciclos cerrados dentro del circuito. Usaremos un total de 3 ciclos distintos para obtener 3 ecuaciones.

El primer ciclo es:

* Nota: Por Ley de Ohm:

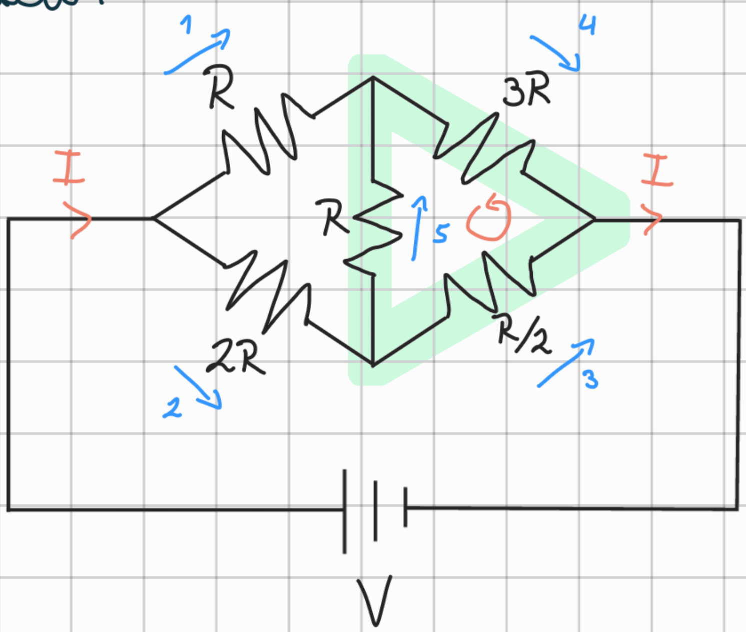
$$V_i = I_i R_i$$



$$2\cancel{R}I_2 + \cancel{R}I_5 - \cancel{R}I_1 = 0$$

$$2I_2 + I_5 - I_1 = 0$$

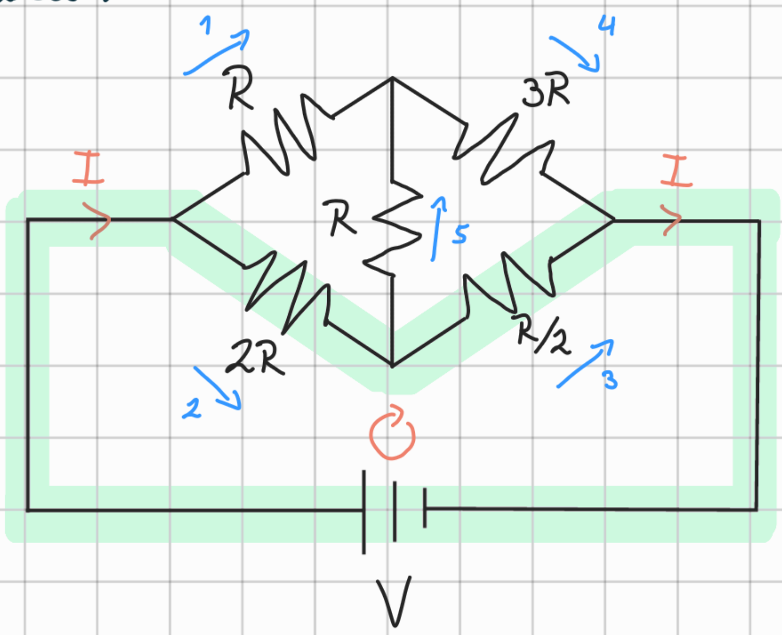
El segundo ciclo:



$$\frac{\cancel{R}}{2}I_3 - 3\cancel{R}I_4 - \cancel{R}I_5 = 0$$

$$\frac{1}{2}I_3 - 3I_4 - I_5 = 0$$

Y el tercer ciclo:



$$V - 2RI_2 - \frac{R}{2} I_3 = 0$$

$$2I_2 + \frac{1}{2} I_3 = V/R$$

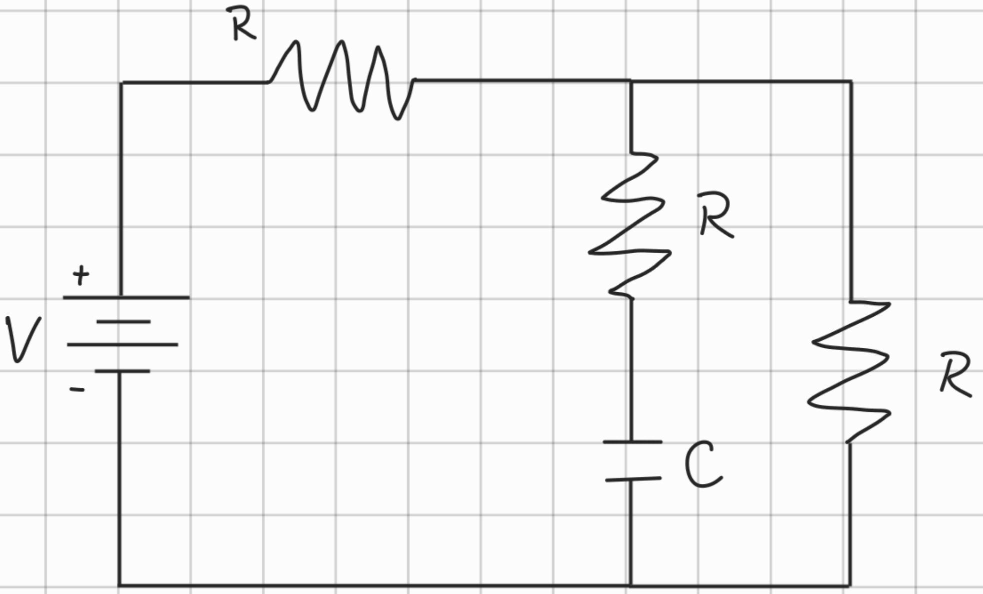
Esto lo podemos escribir como un sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \frac{V}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $I = \frac{34}{43} \frac{V}{R}$
- $I_1 = \frac{19}{43} \frac{V}{R}$
- $I_2 = \frac{15}{43} \frac{V}{R}$
- $I_3 = \frac{26}{43} \frac{V}{R}$
- $I_4 = \frac{8}{43} \frac{V}{R}$
- $I_5 = \frac{-11}{43} \frac{V}{R}$

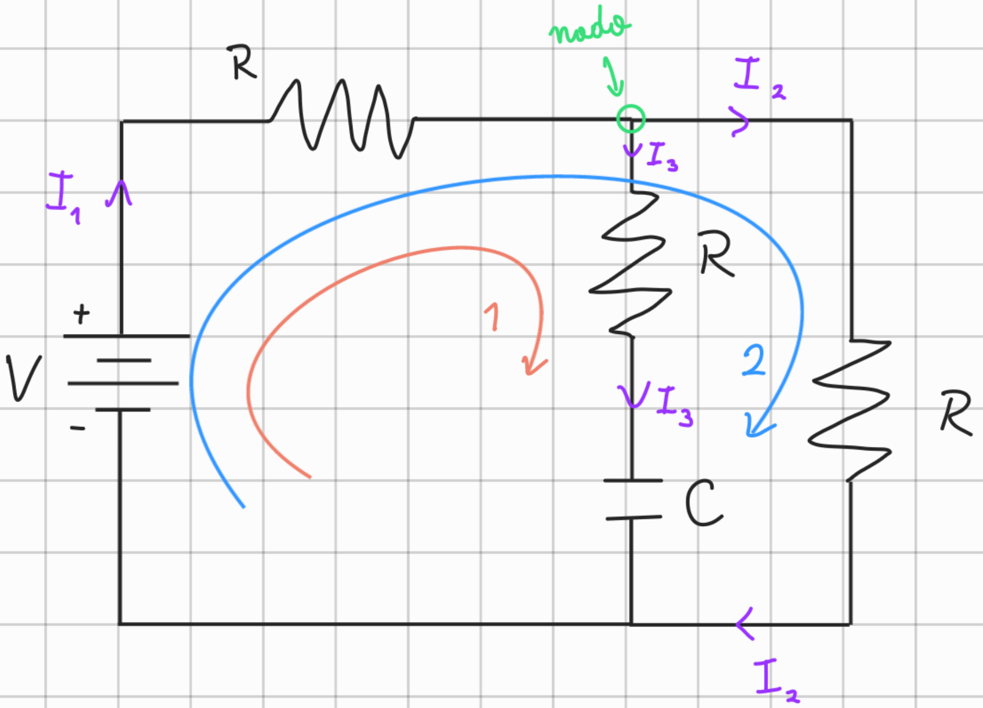
P5

En la primera situación el circuito se encuentra cerrado así



a)

Para esta parte podemos resolver usando las leyes de Kirchhoff usando los bucles de a continuación



La ley para el voltaje nos dice que la suma de los voltajes en un bucle cerrado es 0, por lo tanto tenemos que

(1) $V - I_1 R - I_3 R - V_c = 0$ $\qquad V_c \equiv \frac{Q}{C}$ ← el voltaje de la capacitancia

(2) $V - I_1 R - I_2 R = 0$

* La razón por la que a V le restamos los demás voltajes es porque **dentro** del voltaje principal (la "batería") la corriente fluye en el sentido opuesto al resto del circuito.

Además la ley de la corriente nos dice que la suma de las corrientes que entran y salen de un nodo es siempre 0, en consecuencia

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \iff I_1 = I_2 + I_3 \quad (3)$$

Notemos que I_1 esta sumando pues esta corriente entra en el nodo, mientras que I_2 e I_3 están restando porque estas salen del nodo.

Ahora deberemos resolver para el sistema de ecuaciones centrándonos en I_3 que es la corriente que entra en el capacitor.

(1) − (2):

$$-I_3 R - V_c + I_2 R = 0$$

$$I_2 = I_3 - \frac{V_c}{R} \quad (4)$$

(1) y (3) $\Rightarrow$ $V - (I_2 + I_3) R - I_3 R - V_c = 0$

$$V - I_2 R - I_3 R - I_3 R - V_c = 0$$

$$(4) \Rightarrow \quad V - \left(I_3 - \frac{V_c}{R}\right)R - 2I_3R - V_c = 0$$

$$V - I_3R - V_c - 2I_3R - V_c = 0$$

$$V - 3I_3R - 2V_c = 0$$

Como la corriente **entra** en el capacitor, tenemos que $I_3 = +\frac{dQ}{dt}$
Reemplazando

$$V - 3\frac{dQ}{dt}R - \frac{2Q}{C} = 0$$

recordar $V_c = Q/C$

Reordenamos

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{2Q}{3RC} = \frac{V}{3R}$$

EDO lineal de 1er orden no homogénea. La solución es una solución homogénea + solución particular.
Resolvemos la ecuación homogénea

$$\frac{dQ_H}{dt} + \frac{2Q}{3RC} = 0$$

$$\frac{dQ_H}{dt} = \frac{-2Q_H}{3RC}$$

$$\frac{dQ_H}{Q_H} = \frac{-2dt}{3RC} \Big/ \int$$

$$\ln(Q_H) = \frac{-2t}{3RC} + A \Big/ e^{(\cdot)}$$

A = cte. de integración

$$Q_H = e^{\frac{-2t}{3RC} + A} = e^{\frac{-2t}{3RC}} e^{A} = K e^{\frac{-2t}{3RC}}$$

$K \equiv e^A$ otra cte.

$$\boxed{Q_H = K e^{\frac{-2t}{3RC}}}$$

Ahora la solución particular, para esto cualquier cosa que resuelva la EDO basta, probemos con la siguiente cte.

$$Q_p = \frac{VC}{2}$$

Reemplazando en la EDO

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{2Q}{3RC} = \frac{V}{3R}$$

$$\cancel{\frac{d}{dt}\left(\frac{VC}{2}\right)}^{\,0} + \frac{\cancel{2}\,V\cancel{C}}{3R\cancel{C}\cdot\cancel{2}} = \frac{V}{3R}$$

$$\frac{V}{3R} = \frac{V}{3R}$$ ✓ Funciona :0 (xd)

Así la solución general es

$$Q(t) = K e^{\frac{-2t}{3RC}} + \frac{VC}{2}$$

Para despejar *K* impones la condición inicial en la cual el condensador inicialmente se encuentra descargado, es decir

$$Q(t=0) = 0 = K + \frac{VC}{2} \Rightarrow K = -\frac{VC}{2}$$

$$\therefore \quad Q(t) = -\frac{VC}{2} e^{\frac{-2t}{3RC}} + \frac{VC}{2}$$

$$Q(t) = \frac{VC}{2}\left(1 - e^{\frac{-2t}{3RC}}\right)$$

Como se nos dice que el circuito estuvo conectado un tiempo prolongado estudiamos

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \frac{VC}{2}\left(1 - \cancel{\lim_{t\to\infty} e^{\frac{-2t}{3RC}}}^{\,0}\right)$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} Q(t) = \frac{VC}{2}}$$

Esta es la carga en el condensador antes de cerrar el switch.

b)

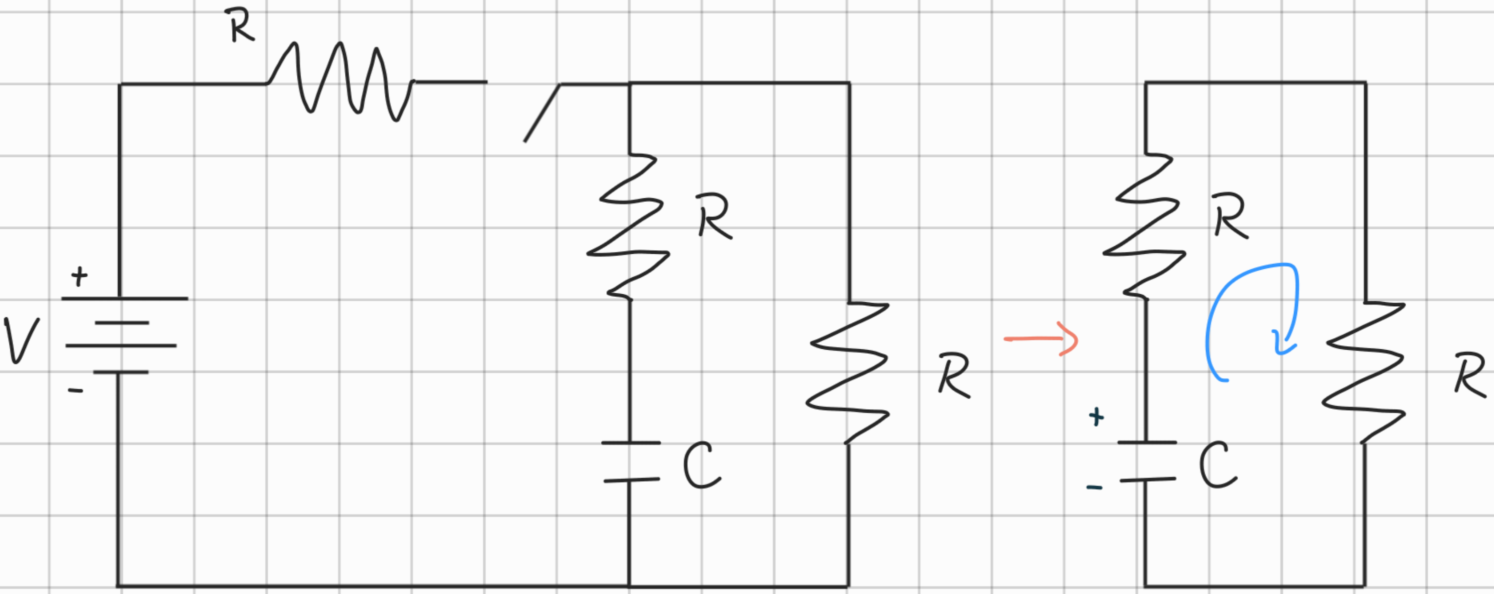
Ahora vemos la energía

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{V^2 C}{8}}$$

c)

Ahora el switch está abierto, por lo que el lado derecho del circuito queda desconectado de la batería. En este caso toda la corriente que fluye se debe únicamente al voltaje del capacitor



Aplicamos Kirchhoff otra vez

$$V_c - IR - IR = 0$$

$$V_c - 2IR = 0$$

Como ahora la carga **sale** del capacitor se tiene que $I = -\frac{dQ}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{Q}{C} - 2\left(-\frac{dQ}{dt}\right)R = 0$$

Reordenando

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{2RC} = 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{-Q}{2RC}$$

Ya sabemos la solución de esta EDO por la parte anterior

$$Q(t) = K e^{\frac{-t}{2RC}}$$

Imponemos condición inicial. Sabemos que justo antes de cerrar el switch la carga en el condensador es $\frac{VC}{2}$

$$\therefore \quad Q(t=0) = \frac{VC}{2} = K$$

$$\Rightarrow \quad Q(t) = \frac{VC}{2} e^{\frac{-t}{2RC}}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{V\cancel{C}}{2}\left(\frac{-1}{2R\cancel{C}}\right) e^{\frac{-t}{2RC}}$$

$$\boxed{I = \frac{-V}{4R} e^{\frac{-t}{2RC}}}$$

Cuando estoy en una competencia de ser la materia más fome de electro pero mi oponente son circuitos