FI2002-2 Electromagnetismo
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliar: Felipe Carrasco V.

Auxiliar 3: Del año pasado que no hacemos aux JAJA

2 de enero de 2025

P1. Un diodo cilíndrico coaxial consiste en una parte interior maciza de radio a, y un cascarón cilíndrico externo de radio b (Figura 1) separados por vacío. Este posee una densidad de carga volumétrica uniforme $\rho > 0$ en su parte interior, y una densidad de carga superficial uniforme $\sigma < 0$ en su parte exterior de manera que la carga total del sistema es 0. El largo L del diodo es mucho mayor a b.

a) Calcule el campo eléctrico en todo el espacio.

b) Calcule el potencial en todo el espacio.

c) Grafique $|V(r)|$.

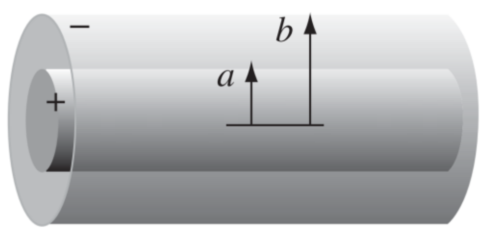

Figura 1: Diodo coaxial.

P2. Se tienen dos discos conductores paralelos de radio R separados una distancia $d \ll R$. Entre ellos hay un dieléctrico cuya permitividad sigue la siguiente relación

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\, r/R$$

Los discos se encuentran a una diferencia de potencial V_0

a) Calcule el campo eléctrico y vector desplazamiento entre los discos.

b) Determine la polarización $\vec{P}$, la densidad de carga de polarización volumétrica ρ_p y las densidades de carga de polarización superficiales σ_p.

c) ¿Cuál es la carga total contenida en la placa inferior?

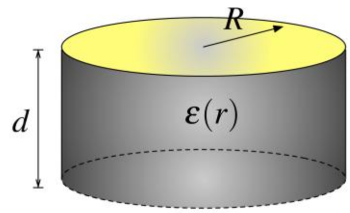

Figura 2: Discos paralelos.

P3. [Trabajo dirigido] Considere el campo eléctrico calculado en la P2 del auxiliar pasado.

$$\vec{E} = \begin{cases} 0; & r < a \\ \dfrac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r}; & r \in [a, b] \\ \dfrac{k(b-a)}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r}; & r > b \end{cases}$$

a) Calcule el potencial en todo el espacio usando como referencia el infinito.

b) **[Propuesto]** Verifique su resultado calculando $-\nabla V$.

c) Calcule la energía del sistema.

P4. Un cascarón esférico grueso, de radio interno a y radio externo b, está hecho de un material dieléctrico con una polarización

$$\vec{P}(r) = \frac{k}{r}\hat{r}$$

donde k es una constante y r es la distancia desde el centro (Figura 3). En este sistema no hay carga libre. Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.

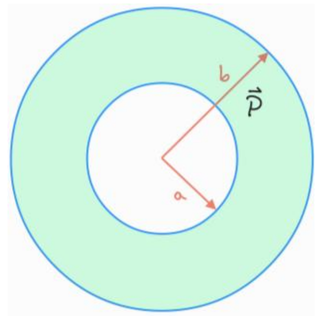

Figura 3: Cascarón dieléctrico.

P5. Considere una carga puntual $q > 0$ a una distancia r de un dipolo de momento dipolar p el cual forma un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la Figura 4.

a) Calcule la energía del sistema ¿Para qué valor de θ se maximiza la energía?
b) Encuentre la fuerza que la carga q ejerce sobre el dipolo.

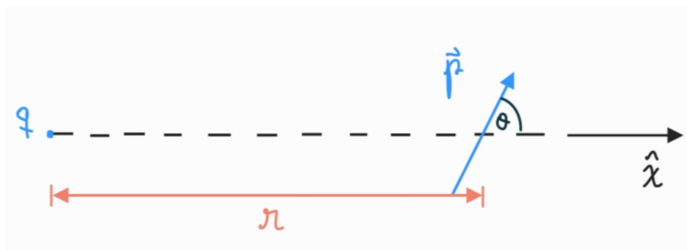

Figura 4: Carga puntual y dipolo.

Resumen

- **Rotor de $\vec{E}$**: Para el caso electroestático, se puede demostrar que:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

- **Potencial eléctrico:** La relación anterior permite definir el potencial eléctrico:

$$V(\vec{r}) \equiv -\int_{O}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

donde O es un algún punto de referencia que podemos elegir libremente.

Una propiedad muy importante que cumple el potencial eléctrico es que este siempre es continuo, esto puede ser útil para chequear resultados o imponer condiciones de borde.

- **Diferencia de potencial:** Corresponde al trabajo por unidad de carga necesario para mover dicha carga desde un punto $\vec{r}_1$ a otro punto $\vec{r}_2$ a través de un campo eléctrico $\vec{E}$. Este se calcula como:

$$\Delta V = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para distribuciones de carga finitas se suele usar como referencia el infinito, donde $V(\infty) = 0$ y así:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

De todo lo anterior se desprende que:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

MUCHO ojo con el signo menos (prohibido olvidar).

Y al igual que el campo eléctrico, el potencial puede ser calculado mediante integración directa como:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{dq(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

- **Gradiente en diferentes sistemas coordenados:**

  1. Cartesianas: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$
  2. Cilíndricas: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$
  3. Esféricas: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta}$

- **Energía electrostática:** Para una distribución de carga, corresponde al trabajo que se debe realizar para trasladar esa carga desde regiones de potencial cero al lugar que ocupa en la distribución, se puede pensar como la energía necesaria para "armar" un sistema de cargas. Para un sistema de N cargas puntuales, la energía estará dada por:

$$U = \sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)$$

Para distribuciones continuas

$$U = \frac{1}{2}\int \rho V\, dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\substack{Todo\ el\\ espacio}} \left|\vec{E}\right|^2 dV$$

- **Dipolo:** Se constituye de dos cargas puntuales $+q$ y $-q$ separadas una distancia d la cual es muy pequeña comparada con la distancia a la que estamos trabajando. Para esta configuración el momento dipolar es:

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

donde $\vec{d}$ es el vector que apunta desde la carga negativa a la positiva.

El potencial producido por un dipolo ubicado en el origen es:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

Esta expresión nos dice que el potencial de un dipolo, a diferencia del de una carga puntual, depende de la dirección de observación (a través del ángulo θ). Además, depende de la distancia como $1/r^2$, mientras que el de una carga puntual va como $1/r$. Esto quiere decir que el potencial (y campo) de un dipolo disminuyen más rápidamente con la distancia que el de una carga puntual.

El campo eléctrico en $\vec{r}$ generado por un dipolo es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

Para distribuciones más complejas, sean discretas o continuas, la expresión del momento dipolar viene dada por:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i\vec{r}_i\, \vec{p} = \int dq(\vec{r}\,')\vec{r}\,'$$

donde $dq = \rho dV'$, $dq = \sigma dS'$ o $dq = \lambda dl'$.

La energía de un dipolo inmerso en un campo eléctrico externo $\vec{E}$ es:

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

- **Densidades de carga de polarización:** Cuando un material dieléctrico se polariza, aparecen cargas de polarización, las cuales pueden ser calculadas a partir del vector de polarización como sigue:

  $$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \qquad\qquad \sigma_p = \vec{P}|_{borde} \cdot \hat{n}$$

  donde $\hat{n}$ es la normal exterior a la superficie del dieléctrico.

- **Vector desplazamiento:** Para un medio dieléctrico lineal (los que veremos en el curso) se cumple que:

  $$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$$

  donde ε es la permitividad absoluta del material.

- **Ley de Gauss en medios materiales:** Dentro de un medio material de permitividad ε se cumple:

  $$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l$$

  con ρ_l la densidad de carga libre.

  En forma integral tenemos:

  $$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc}^{(l)}$$

- **Energía electrostática en medios dieléctricos:** Para una distribución continua la energía se calcula como:

  $$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV$$

  esta integral se debe realizar sobre **todo** el espacio. Noten que la otra fórmula para la energía es un caso particular de esta.