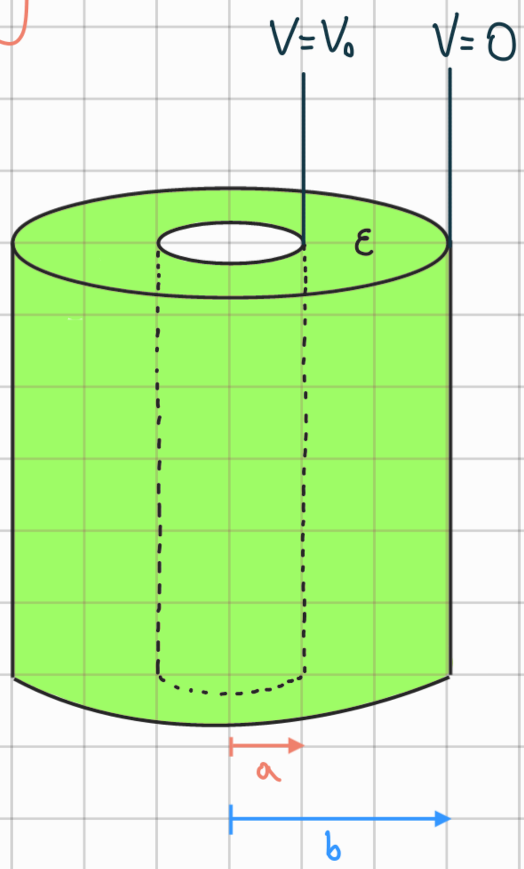
P1)



Para la parte interior ($r < a$) podemos resolver mediante la Ley de Gauss. Se puede notar de inmediato que en dicha zona la carga encerrada sera igual a 0, pues se tiene un vacío.
Así entonces:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

Por los argumentos de simetría que ya conocemos para cilindros infinitos, sabemos que

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} \implies \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} E(r)\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}\, r\, d\varphi\, dz = 2\pi r L E(r)$$

$\therefore$

$$2\pi r L E(r) = 0 \implies \boxed{\vec{E}(r) = 0} \quad r<a$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \implies \boxed{\vec{D} = 0} \quad r<a$$

Además sabemos que

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Esta igualdad se satisface si V es una constante a determinar C

$\therefore \quad V = C$

Ahora podemos determinar el valor de esta constante imponiendo condiciones de borde. Sabemos que el potencial debe ser continuo, y además se nos dice que este vale V_0 en $r=a$, entonces para que el potencial sea continuo en todo $r \leq a$

$$C = V_0 \Rightarrow \boxed{V(r) = V_0} \quad r \leq a$$

$r > a$ $(r \in [a, b] \text{ y } r > b)$

Para estas zonas (entremedio de los cilindros y fuera de ellos) no conocemos las densidades de carga ni la carga presente en los cilindros, por lo que no podemos resolver mediante Ley de Gauss. Sin embargo, conocemos el potencial en 2 puntos del espacio, por lo que podemos resolver usando la Ecuación de Poisson

$$\boxed{\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0}$$

Notemos que en este sistema el material dieléctrico no se encuentra cargado, por lo que $\rho = 0$ (no hay densidad de carga). Este caso particular de la ecuación de Poisson se denomina Ecuación de Laplace:

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

En coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Por la simetría sabemos que V no puede tener dependencias de φ ni z, por tanto

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

Ahora podemos resolver esta ecuación diferencial mediante integración directa

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \quad / \times r$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \quad / \int dr$$

Integramos a ambos lados respecto a r. **No** olvidar la cte. de integración (es muy importante)

$$r\frac{\partial V}{\partial r} = C_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{C_1}{r} \quad / \int dr$$

$$\boxed{V(r) = C_1 \ln(r) + C_2}$$

Ahora solo nos queda despejar las constantes, esto lo podemos hacer imponiendo las condiciones de borde en cada zona

$r \in [a, b]$

$$V(r=a) = V_0 \Rightarrow V(r=a) = C_1 \ln(a) + C_2 = V_0 \quad (1)$$

$$V(r=b) = 0 \Rightarrow V(r=b) = C_1 \ln(b) + C_2 = 0 \quad (2)$$

$(1)-(2) \Leftrightarrow \quad C_1 \ln(a) + \cancel{C_2} - C_1 \ln(b) - \cancel{C_2} = V_0$

$$C_1 \left(\ln(a) - \ln(b)\right) = V_0$$

$$C_1 \ln\left(\frac{a}{b}\right) = V_0$$

$$\boxed{C_1 = \frac{V_0}{\ln(a/b)}}$$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln(b) + C_2 = 0$

$$C_2 = \frac{-V_0 \ln(b)}{\ln(a/b)}$$

$$C_2 = \frac{V_0 \ln(b)}{-\ln(a/b)}$$

$$\boxed{C_2 = \frac{V_0 \ln(b)}{\ln(b/a)}}$$

$\Rightarrow \quad \boxed{V(r) = \frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln(r) - \frac{V_0 \ln(b)}{\ln(a/b)}} \quad r \in [a, b]$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + 0$$

$\boxed{\vec{E} = \frac{-V_0}{\ln(a/b)\, r} \hat{r}} \quad r \in [a, b]$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow \quad \boxed{\vec{D} = \frac{-\varepsilon V_0}{\ln(a/b)\, r} \hat{r}} \quad r \in [a, b]$

$r > b$

$$V(r=b) = 0 \Rightarrow V(r=b) = C_1 \ln(b) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \ln(b)$$

$$\star\ V(r=\infty) \neq \infty \Rightarrow V(r=\infty) = C_1 \ln(\infty) + C_2 \neq \infty \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

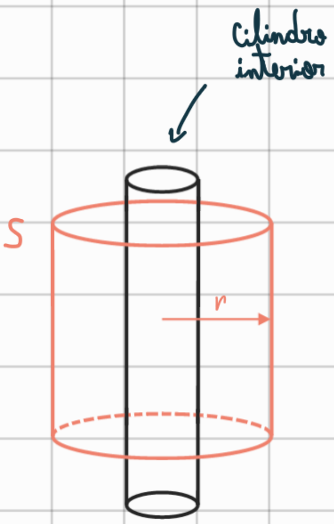
$$\therefore \boxed{V(r) = 0} \quad r > b$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = 0} \qquad \boxed{\vec{D} = 0} \qquad r > b$$

★ El potencial **no** puede diverger (aka. ser "infinito") en ningún punto del espacio, esto es algo que siempre se debe cumplir.

b)

Como ya conocemos **D** en el medio dieléctrico, podemos calcular la carga libre encerrada usando la Ley de Gauss



$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{enc}^{(1)}$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon V_0}{\ln(a/b)\,\cancel{r}}\,\overbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}^{=1}\,\cancel{r}\,d\varphi\,dz = Q_{enc}^{(1)}$$

$$Q_{enc}^{(1)} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon V_0}{\ln(a/b)}\,d\varphi\,dz$$

$$= \frac{-\varepsilon V_0}{\ln(a/b)}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} d\varphi\,dz$$

$$\boxed{Q_{enc}^{(1)} = \frac{-2\pi L\varepsilon V_0}{\ln(a/b)}}$$

c)

$$U = \frac{1}{2}\underset{\text{Todo el espacio}}{\int} \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{1}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{a} 0\,dV + \frac{1}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{a}^{b} \overbrace{\frac{\cancel{-}\varepsilon V_0}{\ln(a/b)\,r}\hat{r}\cdot\frac{\cancel{-}V_0}{\ln(a/b)\,r}\hat{r}}^{\hat{r}\cdot\hat{r}=1}\,dV + \frac{1}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{b}^{\infty} 0\,dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{a}^{b} \frac{\varepsilon V_0^2}{\ln(a/b)^2\, r^{\cancel{2}}}\cancel{r}\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} L\,\cancel{2}\pi\,\frac{\varepsilon V_0^2}{\ln(a/b)^2}\int_{a}^{b}\frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\pi L \varepsilon V_0^2}{\ln(a/b)^2}\ln(r)\Big|_{a}^{b} = \frac{\pi L \varepsilon V_0^2}{\ln(a/b)^2}\left[\ln(b)-\ln(a)\right]$$

$$= \frac{-\pi L \varepsilon V_0^2}{\ln(a/b)^2}\left[\ln(a)-\ln(b)\right] = \frac{-\pi L \varepsilon V_0^2}{\ln(a/b)^{\cancel{2}}}\cancel{\ln(a/b)}$$

$$\boxed{U = \frac{-\pi L \varepsilon V_0^2}{\ln(a/b)}}$$

P_2

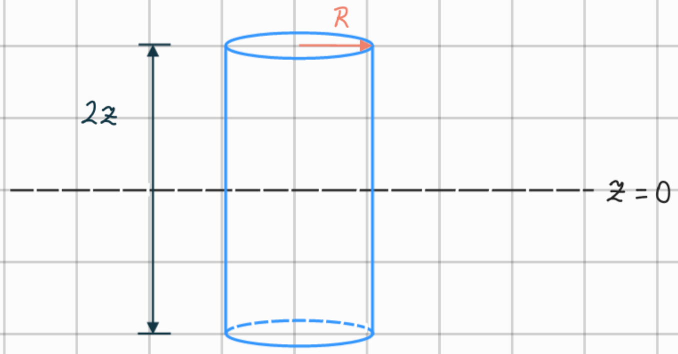
Debido a que la distribución de carga solo depende de *z*, el sistema presenta simetría cartesiana. Podemos notar que si nos movemos en *x* o *y*, a una altura fija de *z* = 0, lo que veremos no cambiará, por lo que el campo eléctrico no puede tener dependencias de *x* ni *y*, y tampoco puede tener componentes en dichas direcciones, por lo tanto

$$\vec{E} = \begin{cases} E(z)\,\hat{z}, & z > 0 \\ E(z)(-\hat{z}), & z < 0 \end{cases}$$

Ahora aplicamos el la Ley de Gauss para resolver.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Podemos notar que la carga no está restringida a ningún lugar en particular del espacio, por lo que siempre nos encontraremos "dentro" de esta distribución, en otras palabras, solo hay una zona donde deberemos calcular el campo eléctrico.
Como de costumbre usaremos un cilindro, centrado en *z* = 0 y de largo 2*z*, para nuestra superficie gaussiana



Por los argumentos de simetría típicos, sabemos que no habrá flujo de campo eléctrico pasando a través del manto del cilindro, de modo que

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{Tapa 1}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{\text{Tapa 2}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= E(z)\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,dr\,d\varphi + E(z)\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,dr\,d\varphi$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi R^2 E(z)}$$

Ahora necesitamos calcular la carga encerrada en nuestro cilindro

$$Q_{enc} = \int_V \rho\, dV = \int_{-z}^{z}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho_0 e^{-k|z'|}\, r'dr'd\varphi' dz'$$

$$= \rho_0 R^2\pi \int_{-z}^{z} e^{-k|z'|}dz' = \rho_0 R^2 \pi\left[\int_0^{z} e^{-kz'}dz' + \int_{-z}^{0} e^{kz'}dz'\right]$$

$$= \rho_0 R^2\pi\left[-\frac{e^{-kz'}}{k}\Big|_0^{z} + \frac{e^{kz'}}{k}\Big|_{-z}^{0}\right] = \frac{\rho_0 R^2\pi}{k}\left[-e^{-kz}+1+1-e^{-kz}\right]$$

$$Q_{enc} = \frac{2\rho_0 R^2\pi}{k}\left(1-e^{-kz}\right)$$

Ahora que tenemos ambos lados de la Ley de Gauss, podemos igualar

$$\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{R^2}E(z) = \frac{\cancel{2}\rho_0\cancel{R^2}\cancel{\pi}}{k\varepsilon_0}\left(1-e^{-kz}\right)$$

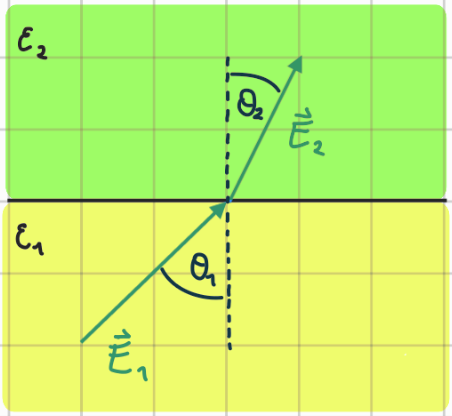
$$E(z) = \frac{\rho_0}{k\varepsilon_0}\left(1-e^{-kz}\right)$$

Y dada la simetría del problema

$$\boxed{\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{k\varepsilon_0}\left(1-e^{-kz}\right)\hat{z}, & z>0 \\ \frac{-\rho_0}{k\varepsilon_0}\left(1-e^{kz}\right)\hat{z}, & z<0 \end{cases}}$$

P3 a)

Primero vemos como sale **E** en la segunda lamina



Podemos usar las condiciones de borde para dieléctricos

$$D_2^\perp - D_1^\perp = \sigma_l$$

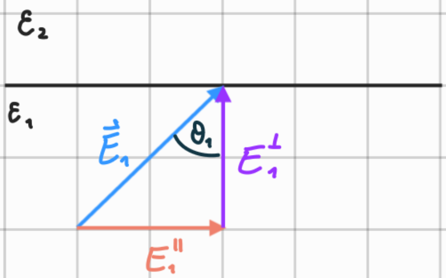
$$E_2^\parallel - E_1^\parallel = 0$$

Ya que no hay densidades de carga libre en las interfaces, entonces $\sigma_l = 0$

$$\Rightarrow D_2^\perp - D_1^\perp = 0 \overset{\vec{D} = \varepsilon\vec{E}}{\Leftrightarrow} \varepsilon_2 E_2^\perp - \varepsilon_1 E_1^\perp = 0 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_2 E_2^\perp = \varepsilon_1 E_1^\perp} \; (1)$$

Y $\boxed{E_2^\parallel = E_1^\parallel}$ (2)

Como conocemos el ángulo θ_1 que el campo forma con la interfaz, podemos descomponerlo en su parte perpendicular y paralela a la interface



$$E_1^\perp = E_1 \cos\theta_1$$

$$E_1^\parallel = E_1 \sin\theta_1$$

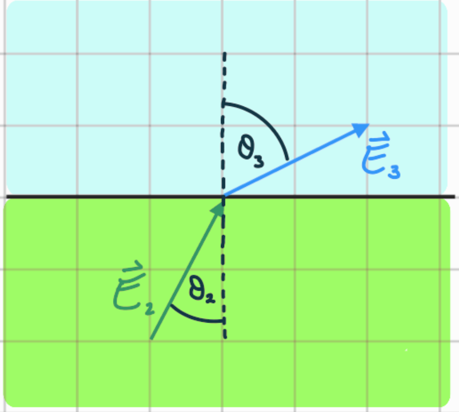
; $\boxed{E_1 \equiv |\vec{E}_1| \text{ (notación)}}$

Por condiciones de borde

$$(1) \Rightarrow \varepsilon_2 E_2^\perp = \varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 \Rightarrow \boxed{E_2^\perp = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 \cos\theta_1}$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{E_2^\parallel = E_1 \sin\theta_1}$$

Ahora repetimos para el campo que pasa de 2 a 3



$$(1) \Rightarrow \varepsilon_3 E_3^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp}$$

$$\varepsilon_3 E_3^{\perp} = \cancel{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_1}{\cancel{\varepsilon_2}} E_1 \cos\theta_1$$

$$E_3^{\perp} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} E_1 \cos\theta_1 \quad (*)$$

$$(2) \Rightarrow E_3^{\parallel} = E_1 \sin\theta_1 \quad (*)$$

Además podemos descomponer $\vec{E}_3$ como

$$E_3^{\perp} = E_3 \cos\theta_3 \qquad\qquad E_3^{\parallel} = E_3 \sin\theta_3$$

Igualamos con las expresiones anteriores

$$\overset{(*)}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} E_1 \cos\theta_1} = E_3 \cos\theta_3 \quad (3) \qquad\qquad \overset{(*)}{E_1 \sin\theta_1} = E_3 \sin\theta_3 \quad (4)$$

Ahora dividimos la ecuación (4) por (3)

$$\frac{\cancel{E_1} \sin\theta_1}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \cancel{E_1} \cos\theta_1} = \frac{\cancel{E_3} \sin\theta_3}{\cancel{E_3} \cos\theta_3}$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta_3$$

$$\boxed{\theta_3 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \operatorname{tg}\theta_1\right)}$$

b)

Que $\vec{E}_1$ sea paralelo a $\vec{E}_3$ implica que $\theta_1 = \theta_3$

La interfaz entre 1 y 2 se mantiene sin carga libre, o sea que esta parte no cambia, por tanto

$$\boxed{E_2^{\perp} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 \cos\theta_1} \qquad (\ast)$$

$$\boxed{E_2^{\parallel} = E_1 \sin\theta_1} \qquad (\ast\ast)$$

Ahora hay una densidad de carga libre entre 2 y 3, por lo que

$$\varepsilon_3 E_3^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} = \sigma_l \qquad (5)$$

$$E_3^{\parallel} = E_2^{\parallel} \qquad (6)$$

De la descomposición de **E**, $(\ast)$ y $(\ast\ast)$

$$\varepsilon_3 E_3 \cos\theta_3 - \cancel{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_1}{\cancel{\varepsilon_2}} E_1 \cos\theta_1 = \sigma_l$$

$$E_3 \sin\theta_3 = E_1 \sin\theta_1$$

Pero $\theta_3 = \theta_1$

$\therefore$

$$\left.\begin{aligned} (\varepsilon_3 E_3 - \varepsilon_1 E_1)\cos\theta_1 &= \sigma_l \\ E_3 &= E_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) E_1 \cos\theta_1 = \sigma_l}$$