FI2002-2 Electromagnetismo
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliar: Felipe Carrasco V.
Ayudante: Matías Zúñiga S.

Auxiliar Extra 1: No hay primero sin segundo.

6 de enero de 2025

P1. Considere dos cascarones metálicos cilíndricos concéntricos de radios a y b ($a < b$), y largo $L \gg b$, entre los cuales existe un material de permitividad ε. El cascarón interior se encuentra a potencial V_0 y el exterior a potencial 0.

a) Calcule el potencial, el campo eléctrico y el desplazamiento en todo el espacio.

b) ¿Qué valor posee la carga acumulada en el cascarón interior?

c) ¿Cuál es la energía del sistema?

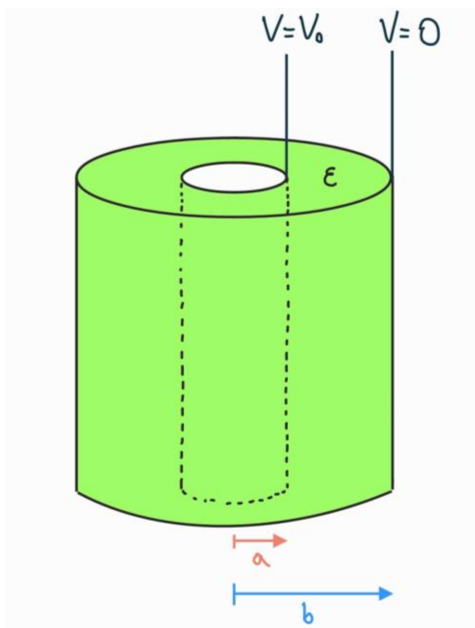

Figura 1: Cilindros concéntricos.

P2. En el espacio existe una densidad de carga de la forma

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-k|z|}$$

donde ρ_0 y k son constantes positivas. Calcule el campo eléctrico en todo el espacio.

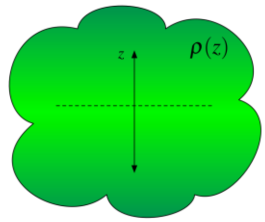

Figura 2: "Nube" de carga.

P3. Tres láminas dieléctricas de permitividades ε_1, ε_2 y ε_3 están apiladas sobre otra como se indica en la Figura 3. El campo eléctrico $\vec{E}_1$ forma un ángulo θ_1 con la normal a la interfase entre los medios 1 y 2. Suponga que los campos eléctricos permanecen constantes en magnitud y dirección al interior de cada medio.

a) Encuentre el ángulo θ_3 que forma el campo con la normal cuando emerge en el medio 3. Suponga que no hay densidades de carga superficial libre en la interfase entre los medios dieléctricos.

b) Encuentre la densidad de carga superficial libre que habría que poner en la interfase entre los medios 2 y 3 para que el campo $\vec{E}_3$ fuera paralelo a $\vec{E}_1$.

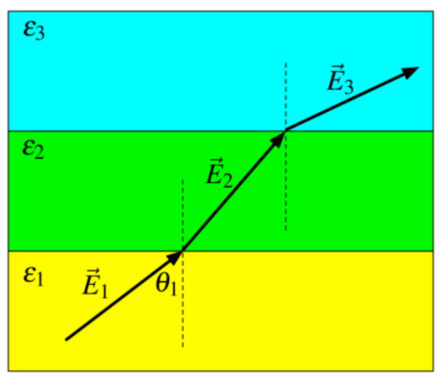

Figura 3: Láminas dieléctricas apiladas.

Resumen

- **Ecuaciones de Poisson y Laplace:** El potencial eléctrico cumple la Ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$$

donde $\nabla^2 V$ es lo que se conoce como el Laplaciano de V. Para regiones del espacio donde no existe densidad de carga (i.e. $\rho = 0$) se tiene la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

Estas ecuaciones diferenciales se pueden resolver si se conocen las condiciones de borde necesarias para el potencial e imponiendo la continuidad de este. Finalmente, el campo eléctrico se puede despejar mediante $\vec{E} = -\nabla V$.

- **Laplaciano en diferentes sistemas coordenados:**

1) Cartesianas: $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

2) Cilíndricas: $\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

3) Esféricas: $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

- **Condiciones de borde para dieléctricos:** Suponga que tiene dos medios dieléctricos que están juntos, donde $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son los campos a cada lado de la interfaz que separa dichos medios. Si $\hat{n}$ es el vector unitario normal a la superficie que **va del medio 1 al 2**, las condiciones de borde para los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ son:

$$\hat{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = 0 \iff D_2^{\perp} - D_1^{\perp} = \sigma_l$$

$$\hat{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0 \iff E_2^{\parallel} - E_1^{\parallel} = 0$$

La primera condición indica que el salto en la componente normal (perpendicular a la interfaz) de $\vec{D}$ viene dado por las densidades de cargas libres presentes en la interfaz. La segunda condición nos dice que la componente tangencial (paralela a la interfaz) del campo eléctrico es continua a través de los medios.