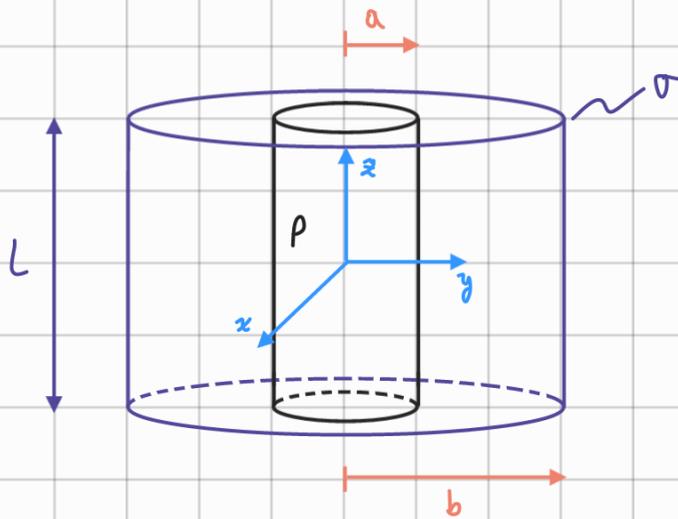


P_1

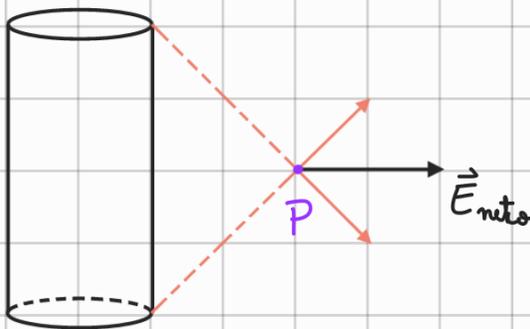
FCV

Ubicamos el sistema de referencia en el centro del cilindro interior y usamos coordenadas cilíndricas



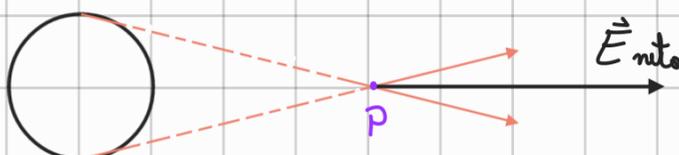
Como se nos dice que $L \gg b$, podemos aproximar este cable como si fuese un cilindro infinito.

Veamos ahora la simetría del problema, pensemos únicamente en el cable interno y algún punto P fuera de este



Notemos que para cada aporte que venga desde arriba de P existirá un aporte que vendrá desde abajo el cual cancelará la componente vertical del campo en ese punto (muy similar a la P_1 del aux 1). Por otro lado, como ahora el cilindro es "infinito" (muy largo), da igual si movemos el punto P para arriba o abajo, siempre habrá un aporte y su contraparte que cancelarán las componentes verticales del campo eléctrico.

Ahora miremos el cilindro desde arriba



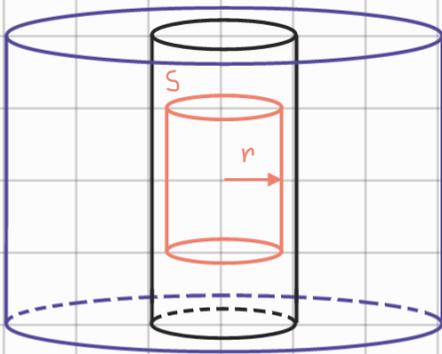
Así como ocurre en una esfera, no importa en que ángulo nos pongamos alrededor del cilindro, siempre existirá un aporte y su "opuesto" que anularán la componente angular del campo eléctrico. Esto se desprende de que la densidad de carga en particular no depende de φ , pues es uniforme. Y por esta misma razón, la intensidad del campo no puede tener dependencias de φ ni z . Los argumentos anteriores se pueden extender al caso en el interior del cilindro macizo y para el cascarón cilíndrico.

De todo lo anterior podemos concluir que el campo eléctrico debe tener la siguiente forma:

$$\vec{E}(r) = E(r)\hat{r} \quad \text{En coordenadas cilíndricas.}$$

Ahora podemos usar la Ley de Gauss para resolver.

Empezamos desde adentro hacia afuera. Colocamos una superficie imaginaria cilíndrica de radio r y alto L al interior del cilindro macizo (en el dibujo no se ve así para que se pueda ver mejor solamente)



Ahora aplicamos la Ley de Gauss sobre este cilindro

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Resolvemos el lado izquierdo primero.

Para el cilindro existen 3 superficies, las 2 tapas y el manto. El diferencial de superficie para las tapas es

$$d\vec{S}_1 = \hat{z} r dr d\varphi \quad \text{Para la tapa superior.}$$

$$d\vec{S}_2 = (-\hat{z}) r dr d\varphi \quad \text{Para la tapa inferior.}$$

Mientras que el diferencial de superficie del manto es:

$$d\vec{S}_s = \hat{r} r d\varphi dz$$

Como tenemos un cilindro completo $\varphi \in [0, 2\pi)$

Mientras que $r' \in [0, r]$

Y como el cilindro tiene largo L $z' \in [-L/2, L/2]$

Por último, ya dedujimos que el campo tiene la forma $E(r)\hat{r}$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^r E(r)\hat{r} \cdot \hat{z} r dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^r E(r)\hat{r} \cdot \hat{z} r dr d\varphi + \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} r d\varphi dz \\ &= E(r)r \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} d\varphi dz \end{aligned}$$

cte. respecto a φ y z

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi L E(r)r$$

Ahora el lado derecho

$$Q_{enc} = \int_{V'} \rho dV'$$

El diferencial de volumen para un cilindro es $r dr d\varphi dz$

$$\therefore Q_{enc} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho r' dr' d\varphi dz$$

$$Q_{enc} = \pi r^2 L \rho \longrightarrow \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\pi r^2 L \rho}{\epsilon_0}$$

Igualamos ambos lados

$$2\pi L E(r)r = \frac{\pi r^2 L \rho}{\epsilon_0}$$

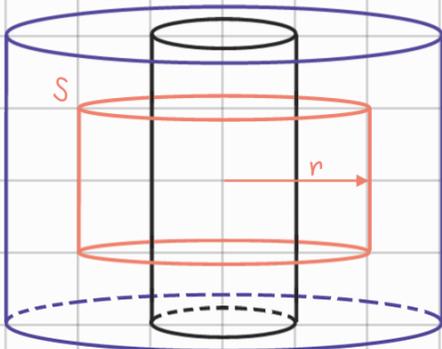
$$E(r) = \frac{r\rho}{2\epsilon_0}$$

Y por los argumentos de simetría concluimos la dirección del campo

$$\vec{E}(r) = \frac{r\rho}{2\epsilon_0} \hat{r} \quad r < a$$

Ahora resolvemos para el espacio intermedio.

Dibujamos nuestra superficie gaussiana con un radio $r \in [a, b)$



En este caso el lado izquierdo de la Ley de Gauss se resuelve de forma análoga a la parte anterior, por lo que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi L E(r)r$$

Ahora Calculemos la carga encerrada por la superficie imaginaria.

Como la superficie tiene un radio $r \in [a, b)$, y fuera del cilindro macizo no hay densidad de carga, tendremos que

$$Q_{enc} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^b \rho r' dr' d\phi dz'$$

$$Q_{enc} = \rho 2\pi L \int_0^a r dr = 2\pi L \rho \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^a$$

$$Q_{enc} = \pi L \rho a^2 \longrightarrow \boxed{\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\pi L \rho a^2}{\epsilon_0}}$$

Igualamos

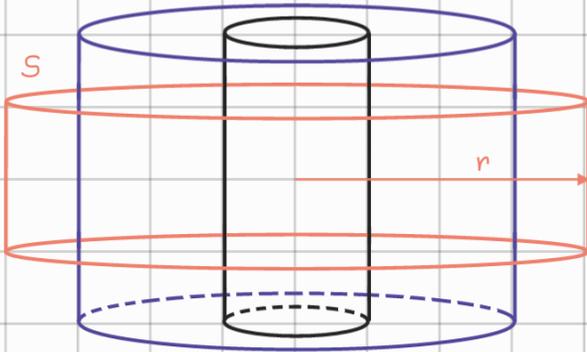
$$2\pi L E(r) r = \frac{\pi L \rho a^2}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r}$$

Y por los argumentos de simetría

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r}} \quad r \in [a, b]$$

Finalmente resolvemos para el exterior del cable.
Ahora nuestra superficie gaussiana es



Nuevamente el lado izquierdo de la Ley de Gauss se resuelve de forma análoga a la primera parte, por lo que

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi L E(r) r}$$

Ahora notemos lo siguiente para la carga encerrada. Se nos dice que el sistema tiene una carga total igual a 0, y ahora nuestra superficie gaussiana encierra todo el cable (aunque en el dibujo no se ve así por razones de visualización), de manera que la carga encerrada es 0

$$Q_{enc} = 0 \rightarrow \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = 0$$

Igualando

$$2\pi L E(r)r = 0$$

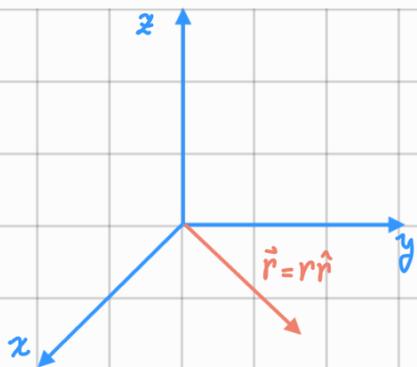
$$\vec{E}(r) = 0 \quad r > b$$

El campo eléctrico es nulo fuera del cable.

$$b) \quad \vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r} & r < a \\ \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r} & r \in [a, b] \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Un detalle importante a notar es que en este caso asumimos una distribución de carga infinita, por lo que **no** podemos tomar como referencia el infinito, de modo que debemos elegir otro punto de referencia para el potencial. En particular podemos escoger el origen como nuestra referencia.

Notemos que \vec{E} solo tiene componente radial, por lo que podemos utilizar un camino como el siguiente para integrar



$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow d\vec{l} = dr\hat{r}$$

$$V = - \int_0^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V = - \int_0^r \vec{E} \cdot \hat{r} dr$$

Dado que tenemos 3 zonas, deberemos calcular el potencial en cada una de ellas

$r < a$

$$V_1 = - \int_0^r \frac{\rho r'}{2\epsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r} dr' = - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^r r' dr' =$$

$$V_1(r) = \frac{-\rho r^2}{4\epsilon_0}$$

$r \in [a, b)$

$$V_2 = - \int_0^a \frac{\rho r'}{2\epsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r} dr' - \int_a^r \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r'} \hat{r} \cdot \hat{r} dr' = \frac{-\rho a^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \int_a^r \frac{dr'}{r'} = \frac{-\rho a^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} (\ln(r) - \ln(a))$$

$$V_2(r) = \frac{-\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right]$$

$r > b$

$$V_3 = - \int_0^a \frac{\rho r'}{2\epsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r} dr' - \int_a^b \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r'} \hat{r} \cdot \hat{r} dr' - \underbrace{\int_b^r 0 \cdot \hat{r} dr'}_{=0} = \frac{-\rho a^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} (\ln(b) - \ln(a))$$

$$V_3(r) = \frac{-\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

Verifiquemos la continuidad de V

$$\ln(1) = 0$$

$$V_1(r=a) = \frac{-\rho a^2}{4\epsilon_0}$$

$$V_2(r=a) = \frac{-\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{a}{a}\right) \right] = \frac{-\rho a^2}{4\epsilon_0}$$

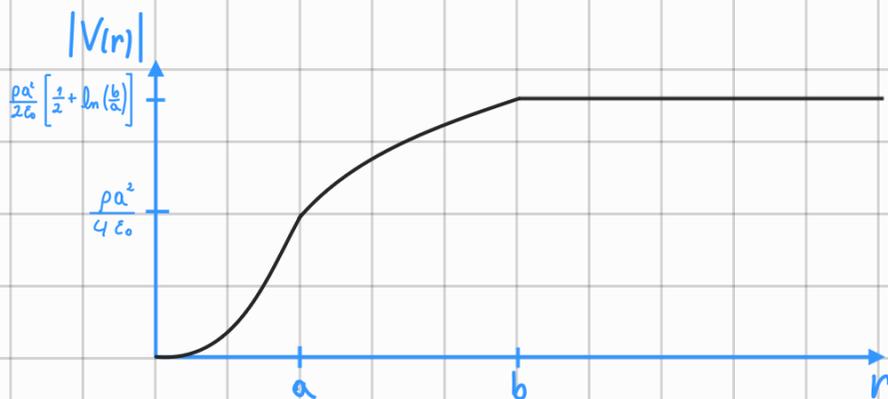
$$V_1(r=a) = V_2(r=a) \checkmark$$

$$V_2(r=b) = \frac{-\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$V_3(r=b) = \frac{-\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$V_2(r=b) = V_3(r=b) \checkmark$$

c)



P₂

Dado que $R \gg d$ podemos aproximar los discos como si fuesen placas infinitas. Ahora, nosotros ya sabemos que el campo eléctrico de una placa infinita apunta únicamente en la dirección vertical y que este es independiente de la distancia al disco, o sea

$$\vec{E} = E \hat{z}$$

Por otro lado, sabemos que la diferencia de potencial entre ambos discos se puede calcular como

$$\Delta V = V_0 = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Reemplazando la forma que ya conocemos para E y usando $d\vec{l} = \hat{z} dz$ (pues E solo tiene componente en \hat{z})

$$V_0 = - \int_0^d E \hat{z} \cdot \hat{z} dz = - E \int_0^d dz = - E d$$

$$\Rightarrow E = -\frac{V_0}{d}$$

Y por los argumentos de simetría

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d} \hat{z} \quad z \in [0, d]$$

Sabemos que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{D} = \left[\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R} \right] \left(-\frac{V_0}{d} \right) \hat{z}$$

$$\vec{D} = - \left[\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R} \right] \frac{V_0}{d} \hat{z} \quad z \in [0, d]$$

b)

Podemos calcular la polarización usando que

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{P} = -\left[\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R}\right] \frac{V_0}{d} \hat{z} + \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \hat{z}$$

$$= -\cancel{\epsilon_0} \frac{V_0}{d} \hat{z} - (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R} \frac{V_0}{d} \hat{z} + \cancel{\epsilon_0} \frac{V_0}{d} \hat{z}$$

$$\vec{P} = (\epsilon_0 - \epsilon_1) \frac{V_0 r}{R d} \hat{z}$$

Ahora podemos calcular las densidades de polarización usando que

$$\rho_p \equiv -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_p \equiv \vec{P} \Big|_{\text{donde}} \cdot \hat{n} \quad \text{donde } \hat{n} \text{ es la normal } \underline{\text{exterior}} \text{ a la superficie.}$$

$$\rho_p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (P_r \cdot r) + \frac{1}{r} \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

$$\text{Veamos que } P_r = P_\varphi = 0$$

Además P_z no depende de z

$$\Rightarrow \rho_p = 0$$

Para calcular las densidades de carga de polarización superficiales debemos hacerlo para las tres superficies del cilindro, las 2 tapas y el manto. Primero vamos con la tapa inferior:

$$\sigma_{p_1} = \vec{P} \Big|_{z=0} \cdot (-\hat{z}) = (\epsilon_0 - \epsilon_1) \frac{V_0 r}{R d} \hat{z} \cdot (-\hat{z}) \rightarrow (-1)$$

$$\sigma_{p_1} = -(\epsilon_0 - \epsilon_1) \frac{V_0 r}{Rd}$$

Ahora para la tapa superior

$$\sigma_{p_2} = \vec{P} \Big|_{z=d} \cdot \hat{z} = (\epsilon_0 - \epsilon_1) \frac{V_0 r}{Rd} \hat{z} \cdot \hat{z}$$

$$\sigma_{p_2} = (\epsilon_0 - \epsilon_1) \frac{V_0 r}{Rd}$$

Finalmente el manto

$$\sigma_{p_3} = \vec{P} \Big|_{r=R} \cdot \hat{r} = (\epsilon_0 - \epsilon_1) \frac{V_0 R}{Rd} \hat{z} \cdot \hat{r}$$

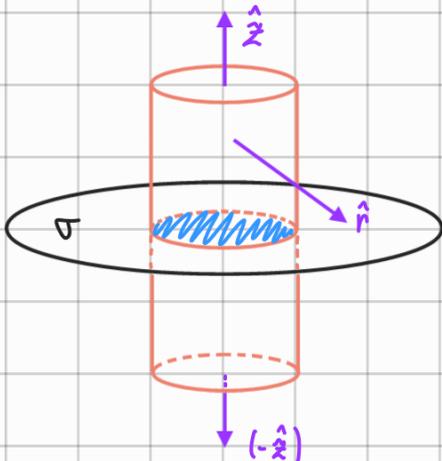
$$\sigma_{p_3} = 0$$

c)

Para determinar la carga libre total en la placa inferior podemos usar la Ley de Gauss para medios materiales

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc}^{(1)}$$

Coloquemos la superficie gaussiana sobre uno de los discos



Como ya conocemos D, por lo que podemos reemplazarlo en el lado izquierdo

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(- \left[\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R} \right] \frac{V_0}{d} \hat{z} \right) \cdot \hat{z} r dr d\varphi$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_0^R 0 \cdot (-\hat{z}) r dr d\varphi \quad (\text{Aquí integramos 0 porque fuera del material } D = 0)$$

$$+ \int_{-2}^{2} \int_0^{2\pi} \left(- \left[\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R} \right] \frac{V_0}{d} \hat{z} \right) \cdot (\pm \hat{r}) R d\varphi dz$$

$$= \frac{-V_0}{d} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R} \right] r dr d\varphi$$

$$= \frac{-V_0}{d} 2\pi \int_0^R \left(\epsilon_0 r + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r^2}{R} \right) dr$$

$$= \frac{-2\pi V_0}{d} \left[\epsilon_0 \int_0^R r dr + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{R} \int_0^R r^2 dr \right]$$

$$= \frac{-2\pi V_0}{d} \left[\epsilon_0 \frac{R^2}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{R} \frac{R^3}{3} \right] = \pi R^2 \left(-4 \frac{V_0}{d} \left[\frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{3} \right] \right)$$

$$= \frac{-2\pi V_0}{d} \left[\epsilon_0 \frac{R^2}{2} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) R^2}{3} \right] = \frac{-\pi V_0}{d} \left[\epsilon_0 R^2 + \frac{2(\epsilon_1 - \epsilon_0) R^2}{3} \right]$$

$$= \frac{-\pi V_0}{3d} \left[3\epsilon_0 R^2 + 2\epsilon_1 R^2 - 2\epsilon_0 R^2 \right]$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{-\pi V_0 R^2}{3d} (\epsilon_0 + 2\epsilon_1) \Rightarrow Q_{enc}''' = \frac{-\pi V_0 R^2}{3d} (\epsilon_0 + 2\epsilon_1)$$

P₃

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{k(r-a)}{\epsilon_0 r^2} & r \in [a, b] \\ \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2} & r > b \end{cases}$$

a)

$$V = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

r > b

$$V = - \int_{\infty}^r \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r'^2} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{r}}_{=1} dr' = - \frac{k(b-a)}{\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} = \frac{k(b-a)}{\epsilon_0} \left(\frac{+1}{r'} \right) \Big|_{\infty}^r$$

$$V(r) = \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r} \quad r > b$$

r ∈ [a, b]

$$V(r) = - \int_{-\infty}^b \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r'^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr' - \int_b^r \frac{k(r'-a)}{\epsilon_0 r'^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr'$$

$$= \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 b} - \frac{k}{\epsilon_0} \int_b^r \frac{r'-a}{r'^2} dr' = \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 b} - \frac{k}{\epsilon_0} \left[\int_b^r \frac{dr'}{r'} - a \int_b^r \frac{dr'}{r'^2} \right]$$

$$= \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 b} - \frac{k}{\epsilon_0} \left[\ln(r/b) - a \left(\frac{-1}{r'} \right) \Big|_b^r \right]$$

$$V(r) = \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 b} - \frac{k}{\epsilon_0} \left[\ln(r/b) + a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \right] \quad r \in [a, b]$$

$r < a$

$$V(r) = - \int_{-\infty}^b \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r'^2} \hat{n} \cdot \hat{r}' dr' - \int_b^a \frac{k(r'-a)}{\epsilon_0 r'^2} \hat{n} \cdot \hat{r}' dr' - \int_a^0 0 dr$$

$$V(r) = \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 b} - \frac{k}{\epsilon_0} \left[\ln(r/b) + a \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right] \quad r < a$$

b)

Propuesto

c)

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{Todo el espacio}} E^2 dV$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty E^2 r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$$

Como E no depende de φ ni θ , podemos hacer la integral de las partes angulares al tiro

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty E^2 r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = 2\pi\epsilon_0 \int_0^\infty E^2 r^2 dr$$

$= 4\pi$

Como el campo es diferente en 3 regiones del espacio, deberemos separar la integral para cada zona

$$U = 2\pi\epsilon_0 \left[\int_0^a 0 r^2 dr + \int_a^b \left[\frac{k(r-a)}{\epsilon_0 r^2} \right]^2 r^2 dr + \int_b^\infty \left[\frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2} \right]^2 r^2 dr \right]$$

$$= 2\pi\epsilon_0 \left[\int_a^b \frac{k^2(r-a)^2}{\epsilon_0 r^2} r^2 dr + \int_b^\infty \frac{k^2(b-a)^2}{\epsilon_0 r^2} r^2 dr \right]$$

$$= \frac{2\pi k^2}{\epsilon_0} \left[\int_a^b \frac{(r-a)^2}{r^2} dr + \int_b^\infty \frac{(b-a)^2}{r^2} dr \right]$$

$$= \frac{2\pi k^2}{\epsilon_0} \left[\int_a^b \frac{(r-a)^2}{r^2} dr + (b-a)^2 \int_b^\infty \frac{dr}{r^2} \right]$$

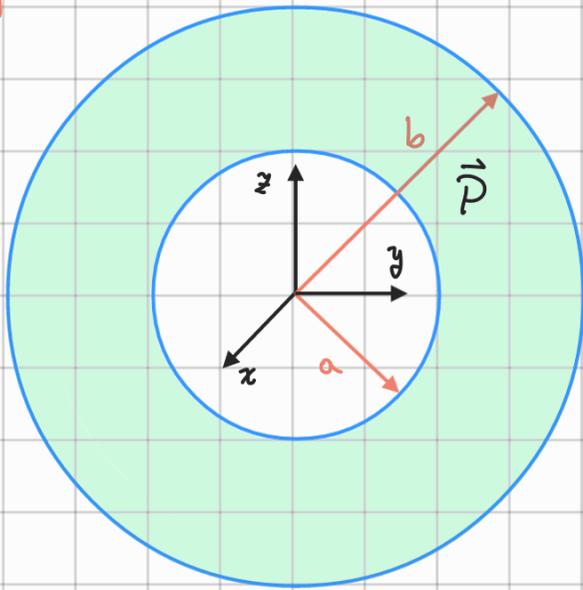
$$= \frac{2\pi k^2}{\epsilon_0} \left[2a \ln(a) - 2a \ln(b) - b + \frac{a^2}{b} + \frac{(b-a)^2}{b} \right]$$

$$= \frac{2\pi k^2}{\epsilon_0} \left[2a \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \cancel{b} + \frac{\cancel{a^2}}{b} + \cancel{b} - 2a - \frac{\cancel{a^2}}{b} \right]$$

$$= \frac{2\pi k^2}{\epsilon_0} \left[2a \ln\left(\frac{a}{b}\right) - 2a \right]$$

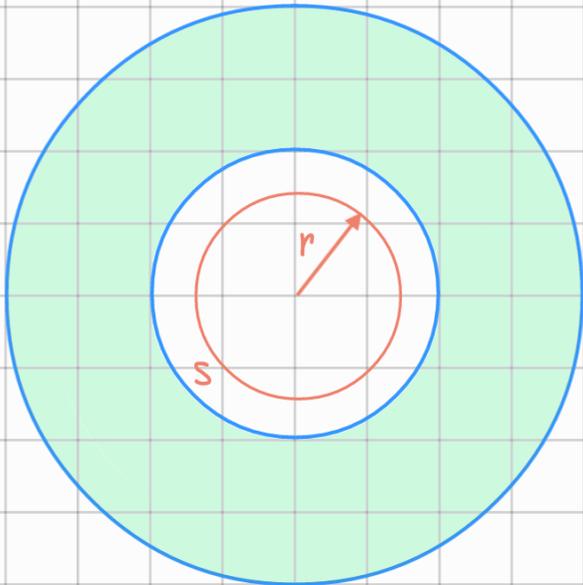
$$U = \frac{4\pi a k^2}{\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{a}{b}\right) - 1 \right]$$

P_4



$$\vec{P} = \frac{k}{r} \vec{r}$$

Para la parte interna ($r < a$) podemos resolver mediante Ley de Gauss, colocando la superficie gaussiana como se ve a continuación



En esta zona no hay densidad carga, por lo que la carga encerrada es 0.

Luego, por los argumentos de simetría que ya conocemos se puede concluir que el campo en esta zona es cero.

En resumen:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E \int_s ds = 0$$

$$4\pi r^2 E = 0$$

$$\vec{E}(r) = 0 \quad r < a$$

Recuerden que ya hemos resuelto sistemas muy similares a este, por lo que el desarrollo para esta zona no tiene nada de nuevo.

Para la zona $r \in [a, b]$ no conocemos la densidad de carga, por lo que no podemos aplicar la Ley de Gauss de forma directa. Sin embargo, podemos obtener las densidades de carga de polarización de la siguiente manera

$$\rho_p \equiv -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_p \equiv \vec{P} \Big|_{\text{superficie}} \cdot \hat{n}$$

Y como se nos dice que no hay carga libre, nos basta con esto para resolver.

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = \frac{-1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{r} r^2 \right) + 0 \quad \rightarrow \quad \vec{P} \text{ no tiene componentes angulares, por lo que las demás derivadas son 0.}$$
$$= \frac{-1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (kr)$$

$$\rho_p = -\frac{k}{r^2}$$

Ahora para las densidades de carga de polarización superficiales tenemos dos superficies, la cara interna del cascarón, y la externa. Primero hacemos la interna

$$\sigma_{p_1} = \vec{P} \Big|_{r=a} \cdot (-\hat{r}) = \frac{k}{a} \hat{r} \cdot (-\hat{r})$$

$$\sigma_{p_1} = -\frac{k}{a}$$

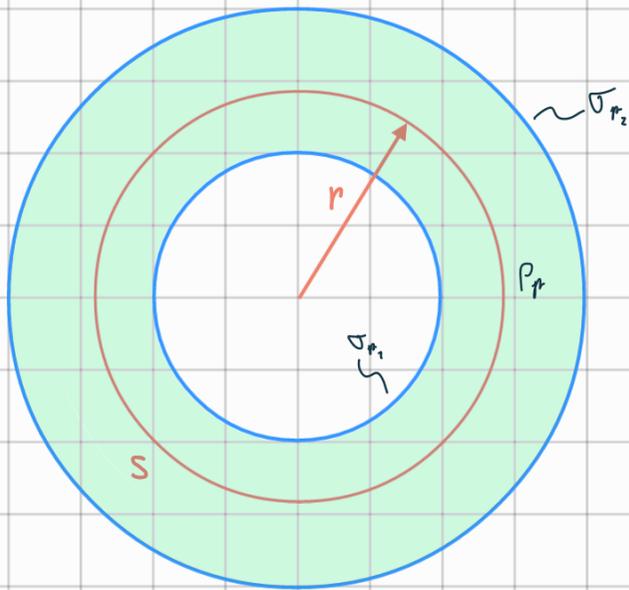
Y ahora la externa

$$\sigma_{p_2} = \vec{P} \Big|_{r=b} \cdot \hat{r} = \frac{k}{b} \hat{r} \cdot \hat{r}$$

$$\sigma_{p_2} = \frac{k}{b}$$

Y ahora que ya conocemos las densidades de carga podemos aplicar la Ley de Gauss.

$$r \in [a, b]$$



Por los argumentos de simetría que ya conocemos para una geometría esférica, podemos sacar \mathbf{E} de la integral en el lado izquierdo

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS = E 4\pi r^2$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

Ahora, para esta superficie gaussiana podemos notar que encerramos por completo la carga de polarización en la cara interna del cascarón, y dado que esta densidad no depende de ninguna coordenadas, la carga total solo será multiplicar la densidad por el área de la cara interna, o sea

$$Q_1 = \sigma_{r_1} \cdot A \rightarrow Q_1 = \frac{-k}{\alpha} \cdot 4\pi a^2$$

$$Q_1 = -4\pi k a$$

Y además estamos encerrando parcialmente la densidad de carga de polarización volumétrica. Dado que esta densidad sí es variable, la calculamos integrando

$$Q_2 = \int_V \rho_r dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_a^r \frac{-k}{r^2} r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = -4\pi k \int_a^r dr$$

$= 4\pi$

$$Q_2 = -4\pi k(r-a)$$

$$\therefore Q_{enc} = Q_1 + Q_2$$

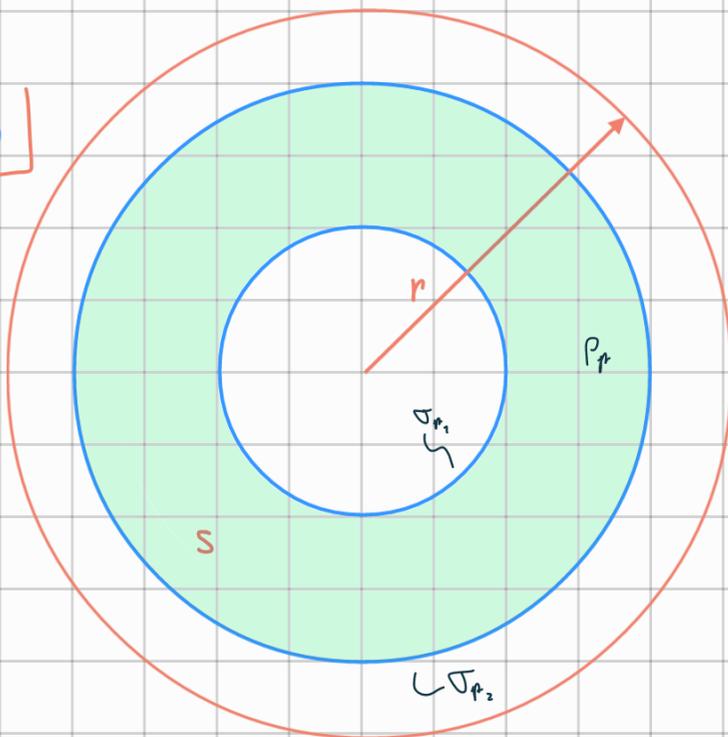
$$Q_{enc} = -4\pi k a - 4\pi k(r-a) \Rightarrow \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{-4\pi k}{\epsilon_0} r$$

Iguando

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{-4\pi k}{\epsilon_0} r$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{-k}{\epsilon_0 r} \quad r \in [a, b]$$

$r > b$



Ahora nuestra superficie gaussiana encierra toda la esfera, por lo que incluye todas las densidades de carga de polarización. Ya conocemos la primera, y vale

$$Q_1 = -4\pi k a$$

La volumétrica la calculamos igual que antes, pero ahora el límite superior de la integral es b , que es hasta donde llega la densidad

$$Q_2 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{-k}{r^2} r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$Q_2 = -4\pi k (b-a)$$

Finalmente calculamos la carga de polarización acumulada en la superficie exterior, esta se hace de forma análoga a Q_1

$$Q_3 = \sigma_{p_2} \cdot A_2 = \frac{k}{b} \cdot 4\pi b^2$$

$$Q_3 = 4\pi k b$$

$$Q_{\text{enc}} = -4\pi k a - 4\pi k (b-a) + 4\pi k b$$

$$= -4\pi k (a + b - a - b)$$

$$Q_{\text{enc}} = 0$$

Por los argumentos de simetría que ya conocemos

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

Igualando

$$4\pi r^2 E(r) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = 0 \quad r > b$$

P_5



a)

La energía del sistema viene dada por la siguiente expresión

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

donde \vec{p} corresponde al dipolo y \vec{E} es el campo eléctrico externo, que en este caso es el campo eléctrico que genera la carga puntual.

Dado que nuestro dipolo se encuentra inclinado en un ángulo θ respecto a la horizontal, podemos descomponerlo en sus componentes horizontal y vertical como sigue

$$\vec{p} = p \cos \theta \hat{x} + p \sin \theta \hat{y}$$

Ahora necesitamos el campo eléctrico que genera la carga puntual, este lo obtendremos a partir del potencial de la carga puntual, el cual sabemos que es

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Usando que $\vec{E} = -\nabla V$ obtendremos el campo eléctrico, pero

primero escribiremos el potencial en coordenadas cartesianas

$$V(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}$$

Y ahora aplicamos el menos gradiente

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} \right) \hat{x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} \right) \hat{y}$$

$$\vec{E} = \frac{qx\hat{x}}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{qy\hat{y}}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Ahora reemplazamos \vec{p} y \vec{E} en la fórmula del inicio

$$U(x, y) = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -(\rho \cos\theta \hat{x} + \rho \sin\theta \hat{y}) \cdot \left(\frac{qx\hat{x}}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{qy\hat{y}}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}} \right)$$

$$U(x, y) = \frac{-\rho q x \cos\theta}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\rho q y \sin\theta}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Con esto tenemos una expresión de la energía para un dipolo ubicado en un punto arbitrario del espacio (x, y) en el campo eléctrico de una carga puntual situada en el origen. Sin embargo, dado que nuestro sistema de referencia está centrado en la carga puntual, sabemos que nuestro dipolo se encuentra en las coordenadas $x = r$ e $y = 0$, por lo que debemos reemplazar estos valores en la expresión anterior de la energía para obtener la energía del sistema, esto es

$$U = -\frac{\rho q \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

El cual es el valor de la energía en nuestro sistema.

Ahora, para conocer el ángulo θ para el cual se maximiza la energía, derivamos e igualamos a 0

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{pq \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \stackrel{!}{=} 0$$

Dado que $\theta \in [0, 2\pi)$, existen dos valores de θ para los cuales se cumple la igualdad, $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

Volvamos a la expresión para la energía

$$U = -\frac{pq \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

notemos que esta se encuentra multiplicada por una función coseno, y sabemos que $\cos\theta \in [-1, 1]$, por lo que el máximo de la energía se dará cuando $\cos\theta = -1$, pues en ese caso tendremos

$$U = -\frac{pq(-1)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Y $\cos\theta = -1$ se cumplirá cuando $\theta = \pi$, por lo que este es el valor de θ que maximiza nuestra energía. 

b)

De mecánica sabemos que $\vec{F} = -\nabla U$, y dado que conocemos U , podemos usar la expresión anterior para encontrar la fuerza que experimenta el dipolo

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$-\nabla U = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-pqx \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{pqy \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \right) \hat{x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-pqx \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{pqy \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \right) \hat{y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{pq \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{pq \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}} \right) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{pq \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

$$-\nabla U = \left(\frac{-3pqxy \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{3pqx^2 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{pq \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}} \right) \hat{x} \\ + \left(\frac{-3pqy^2 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{pq \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3pqxy \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}} \right) \hat{y}$$

$$-\nabla U = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{pq}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \left(\frac{-3xy \sin \theta}{x^2 + y^2} - \frac{3x^2 \cos \theta}{x^2 + y^2} + \cos \theta \right) \hat{x} \\ + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{pq}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \left(\frac{-3y^2 \sin \theta}{x^2 + y^2} + \sin \theta - \frac{3xy \cos \theta}{x^2 + y^2} \right) \hat{y}$$

Esta horrible expresión corresponde a la fuerza que sentiría el dipolo en cualquier punto del espacio (x, y) debido al campo eléctrico que genera una carga puntual situada en el origen, pero nosotros sabemos que nuestro dipolo se encuentra en $x = r$ e $y = 0$, por lo que reemplazando estos valores, encontramos la fuerza que experimenta este

$$-\nabla U \Big|_{\substack{x=r \\ y=0}} = \vec{F} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{pq}{r^3} \left(\frac{-3r^2 \cos \theta}{r^2} + \cos \theta \right) \hat{x} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{pq}{r^3} \sin \theta \hat{y} \\ = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{pq}{r^3} (-2 \cos \theta) \hat{x} + \frac{pq \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \hat{y}$$

$$\vec{F} = \frac{-pq \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3} \hat{x} + \frac{pq \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \hat{y}$$