P1

a)

$$\vec{F} = \frac{1}{r^2}\hat{r} + e^{-r^2}\hat{\varphi} + z\hat{z}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & \frac{1}{r}\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r^2} & re^{-r^2} & z \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left[\hat{r}\cdot 0 - \frac{1}{r}\hat{\varphi}\cdot 0 + \hat{z}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(re^{-r^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,e^{-r^2}\right)\hat{z} = \frac{1}{r}\left(e^{-r^2} + r\,e^{-r^2}\cdot(-2r)\right)\hat{z}$$

$$= \frac{1}{r}\left(e^{-r^2} - 2r^2e^{-r^2}\right)\hat{z}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{F} = \left(1 - 2r^2\right)\frac{e^{-r^2}}{r}\hat{z}}$$

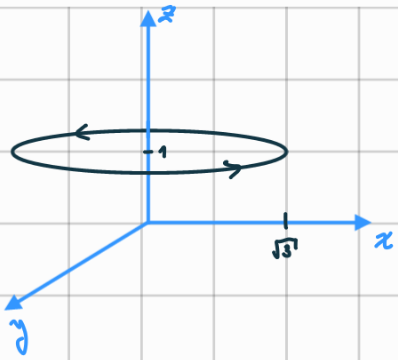
$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}r\right) + \cancelto{0}{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(e^{-r^2}\right)} + \frac{\partial}{\partial z}(z)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) + 1 = \frac{1}{r}\left(\frac{-1}{r^2}\right) + 1$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{F} = 1 - \frac{1}{r^3}}$$

b)

$$\vec{F} = 2yz^2\,\hat{x} + xz^2\,\hat{y} + 3xyz\,\hat{z}$$



Resolvemos mediante el Teorema de Stokes

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2yz^2 & xz^2 & 3xyz \end{vmatrix} = (3xz - 2xz)\,\hat{x} - (3yz - 4yz)\,\hat{y} + (z^2 - 2z^2)\,\hat{z}$$

$$\nabla\times\vec{F} = xz\,\hat{x} + yz\,\hat{y} - z^2\,\hat{z}$$

Dada la orientación de la curva (sentido anti-horario) y su forma (círculo), el diferencial de superficie será

$$d\vec{S} = \hat{z}\, r\,dr\,d\varphi$$

Reemplazando

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \left(\cancelto{0}{xz\,\hat{x}} + \cancelto{0}{yz\,\hat{y}} - z^2\,\underbrace{\hat{z})\cdot\hat{z}}_{=1}\, r\,dr\,d\varphi$$

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (-z^2)\, r\,dr\,d\varphi$$

Dado que nuestra superficie se encuentra en $z = 1$, debemos hacer este reemplazo

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (-1)\, r\,dr\,d\varphi$$

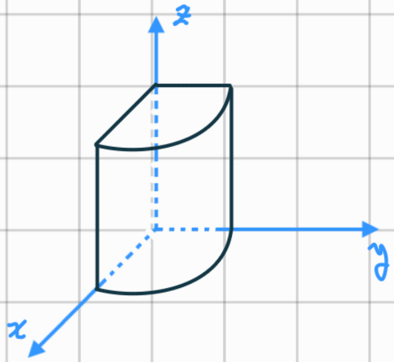
$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_0^{\sqrt{3}} r\,dr$$

$$= -\cancel{2}\pi \times \frac{r^2}{\cancel{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = -3\pi}$$

c)

$$\vec{F} = \left(e^{z}\sin y + x y^{2} z\right)\hat{x} + \left(e^{x}\cos z + x^{2} y z\right)\hat{y} + \left(x^{2} e^{y}\right)\hat{z}$$



Resolveremos usando el Teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla\cdot\vec{F})\, dV$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = y^{2} z + x^{2} z + 0 = (x^{2}+y^{2})\, z$$

En coordenadas cilíndricas: $\nabla\cdot\vec{F} = r^{2} z$

El diferencial de volumen de un cilindro es $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{h}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R} r^{2} z\, r\,dr\,d\varphi\,dz$$

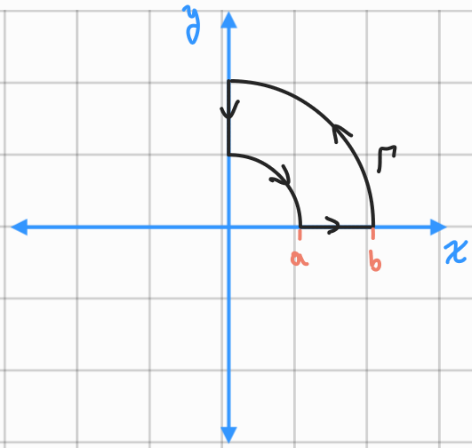
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{h}\int_0^{R} r^{3} z\,dr\,dz$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \frac{r^{4}}{4}\Big|_0^{R} \cdot \frac{z^{2}}{2}\Big|_0^{h}$$

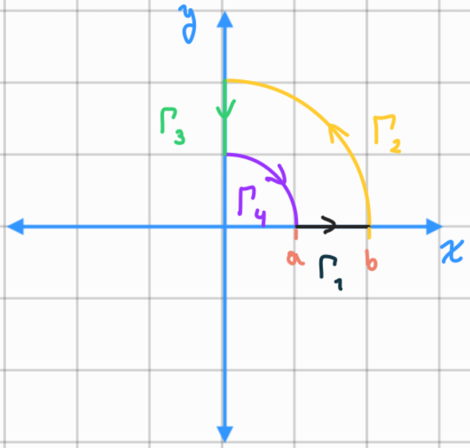
$$\boxed{\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{16} R^{4} h^{2}}$$

d)

$$\vec{E} = \frac{k}{r^2}\hat{r}$$



Separaremos el camino en 4 caminos distintos



El diferencial de camino en cada caso es:

$\Gamma_1 = dr\,\hat{r}$ $\quad\quad$ $\Gamma_2 = b\,d\varphi\,\hat{\varphi}$ $\quad\quad$ $\Gamma_3 = dr(-\hat{r})$ $\quad\quad$ $\Gamma_4 = a\,d\varphi(-\hat{\varphi})$

Así la integral de trabajo queda como

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}\cdot\hat{r}\,dr + \int_0^{\pi/2} \vec{E}\cdot\hat{\varphi}\,b\,d\varphi + \int_a^b \vec{E}\cdot(-\hat{r})dr + \int_0^{\pi/2} \vec{E}\cdot(-\hat{\varphi})\,b\,d\varphi$$

$$= \int_a^b \frac{k}{r^2}\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}dr + \int_a^{\pi/2} \frac{k}{r^2}\cancelto{0}{\hat{r}\cdot\hat{\varphi}}\,b\,d\varphi - \int_a^b \frac{k}{r^2}\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}dr + \int_0^{\pi/2} \frac{k}{r^2}\cancelto{0}{\hat{r}\cdot(-\hat{\varphi})}\,b\,d\varphi$$

$$= k\int_a^b \frac{dr}{r^2} - k\int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0}$$

e)

$$\vec{F} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^h\int_0^{2\pi} (x\hat{x}+y\hat{y})\cdot\hat{r}\, R\, d\varphi\, dz + \int_0^{2\pi}\int_0^R (x\hat{x}+y\hat{y})\cdot\hat{z}\, r\, dr\, d\varphi$$
$$+ \int_0^{2\pi}\int_0^R (x\hat{x}+y\hat{y})\cdot(-\hat{z})\, r\, dr\, d\varphi$$

$$\hat{x}\cdot\hat{z} = \hat{y}\cdot\hat{z} = 0 \Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^h\int_0^{2\pi} (x\hat{x}+y\hat{y})\cdot\hat{r}\, R\, d\varphi\, dz$$

$$= \int_0^h\int_0^{2\pi} (x\hat{x}+y\hat{y})\cdot(\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y})\, R\, d\varphi\, dz$$

$$= R\int_0^h\int_0^{2\pi} x\cos\varphi + y\sin\varphi \; d\varphi\, dz \quad ; \quad \hat{x}\cdot\hat{y} = 0 \quad \hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = 1$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = Rh\int_0^{2\pi} x\cos\varphi + y\sin\varphi \; d\varphi$$

En coordenadas cilíndricas: $x = r\cos\varphi$ y $y = r\sin\varphi$

Reemplazando en la integral:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = Rh\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1}\, d\varphi$$

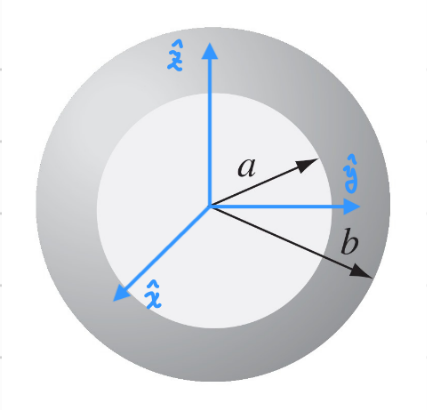
$$= Rh \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 2\pi Rh}$$

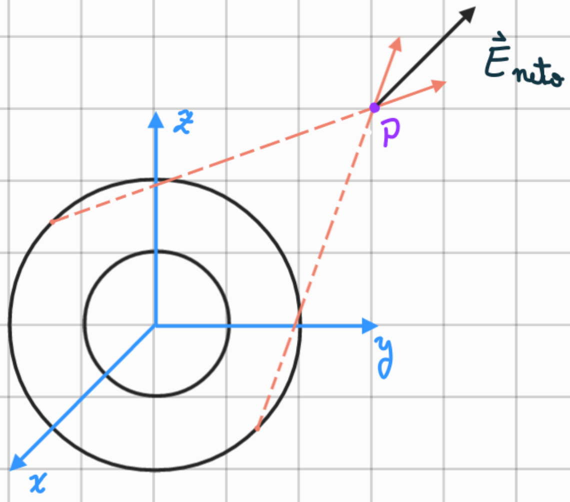
P2)

$\rho = \frac{k}{r^2} \qquad (a \leq r \leq b)$

Iniciamos definiendo nuestro sistema de coordenadas, para este caso lo más adecuado es sitúar el origen en el centro del casquete



Gracias a la simetría del sistema, este problema puede ser resuelto mediante la Ley de Gauss, pero primero debemos justificar su uso.
Pensemos en un punto *P* en el exterior del casquete



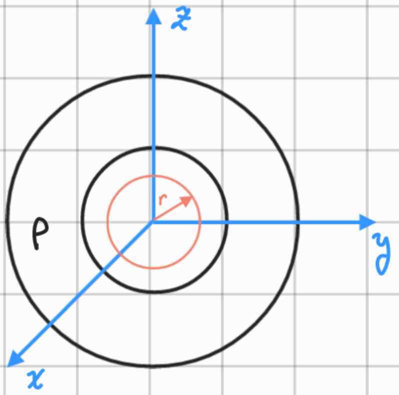
dado que la densidad de carga depende únicamente de *r*, para cada contribución que venga desde algún punto del casquete, existirá su contraparte que anulará las componentes del campo en $\hat{\varphi}$ y $\hat{\theta}$, de forma que este únicamente tendrá una componente en $\hat{r}$. Por otro lado, la intensidad del campo no podrá depender de las variable angulares φ y θ, pues como dijimos, la densidad de carga depende solo de *r*, de todo esto se deduce que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Este análisis se puede extender de forma análoga para puntos al interior del casquete.

Ahora ya podemos usar la Ley de Gauss. Resolveremos el campo desde adentro hacia afuera.

Empezamos dibujando una superficie esférica imaginaria *S* de radio *r* < *a* centrada en el origen



ahora aplicamos la Ley de Gauss en su forma integral

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Resolvamos primero el lado izquierdo. El diferencial de superficie para una esfera es

$$d\vec{S} = \hat{r}\, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \qquad \text{donde } \varphi \in [0, 2\pi) \text{ y } \theta \in [0, \pi]$$

$$\therefore \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{E}\cdot\hat{r}\, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

De los argumentos de simetría dedujimos que $\vec{E} = E(r)\hat{r}$
Reemplazando

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E(r) \underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1} \underbrace{r^2}_{\hookrightarrow \text{ cte. respecto de } \varphi \text{ y } \theta.} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

Como E(*r*) no depende de *φ* ni *θ*, podemos sacarlo de integral

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r) r^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

*Nota:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 4\pi$$

Esta integral aparecerá varias veces, así que es bueno que se la aprendan de memoria.

$$\Rightarrow \boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)r^2 4\pi}$$

Ahora vamos con el lado derecho de la Ley de Gauss.
Notemos en este caso que la carga que encierra nuestra superficie es 0, pues dentro del casquete no hay carga, por lo tanto tenemos que

$$\boxed{Q_{enc} = 0}$$

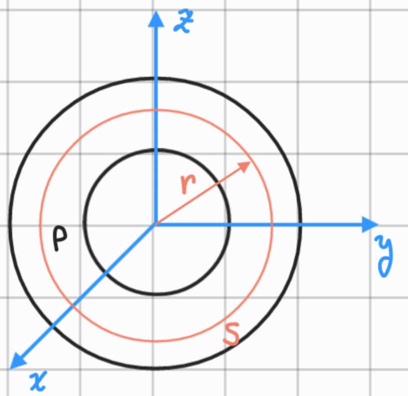
Igualando

$$4\pi r^2 E(r) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = 0} \qquad r < a$$

El campo eléctrico al interior del casquete es nulo.

Ahora resolvamos para la zona intermedia.
Para este caso la superficie imginaria tendrá un radio $r \in [a, b)$



El lado izquierdo de la Ley de Gauss se calcula de la misma manera que en el caso anterior, por lo que

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)}$$

Ahora calculamos el lado derecho.
Notemos que la carga es variable con respecto al radio, por lo que la carga encerrada de carga la calcularemos como

$$Q_{enc} = \int_{V'} \rho(r')\, dV'$$

El diferencial de volumen en coordenadas esféricas es

$$dV = r'^2 \sin\theta' \, dr' d\varphi' d\theta'$$

Por otro lado, tenemos que la densidad de carga solo existe para $a \leq r \leq b$ y como nuestra superficie tiene radio *r*, la integral sobre *r'* irá entre *a* y *r*. Además el cascarón está completo angularmente, por lo que

$$\varphi' \in [0, 2\pi) \qquad y \qquad \theta' \in [0, \pi]$$

Así entonces

$$Q_{enc} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^{r} \frac{k}{\cancel{r'^2}} \cancel{r'^2} \sin\theta' \, dr' d\varphi' d\theta'$$

$$= k \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^{r} \sin\theta' \, dr' d\varphi' d\theta'$$

$$= 4\pi k \, r' \Big|_a^r$$

$$\boxed{Q_{enc} = 4\pi k (r - a)}$$

Igualando ambos lados de la Ley de Gauss

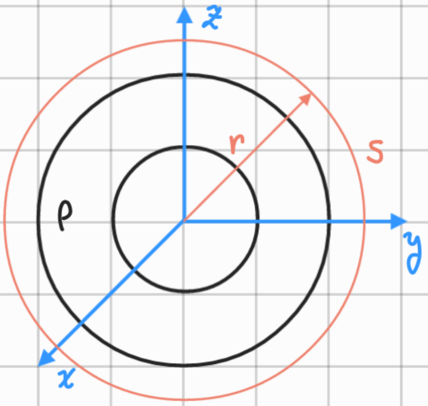
$$\cancel{4\pi} r^2 E(r) = \frac{4\pi k(r-a)}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r^2}$$

Finalmente, por los argumentos de simetría concluimos que **E** apunta en $\hat{r}$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r}} \qquad r \in [a, b]$$

Por último, calculamos el campo fuera del cascarón.
Construimos la superficie imaginaria ahora con un radio $r < b$



Nuevamente el lado izquierdo de la Ley de Gauss se calcula de manera análoga a la primera parte

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)}$$

Ahora para el lado derecho calculamos la carga encerrada.
Recordemos que la carga solo está en $a \leq r \leq b$, y para este caso $r > b$, por lo que los limites de la integral en r' serán a y b. Por lo tanto:

$$Q_{enc} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{k}{\cancel{r'^2}} \cancel{r'^2} \sin\theta' \, dr' \, d\varphi' \, d\theta'$$

$$Q_{enc} = 4\pi k(b-a)$$

Igualando ambos lados de la Ley de Gauss

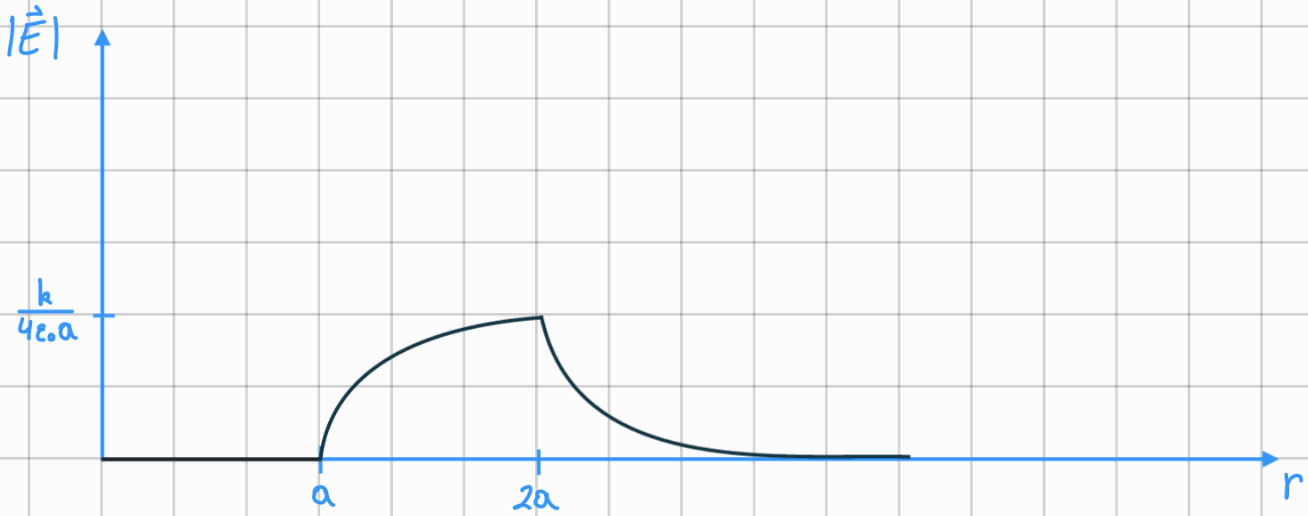
$$\cancel{4\pi} r^2 E(r) = \frac{\cancel{4\pi} k(b-a)}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{k(b-a)}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r}} \qquad r > b$$

Donde otra vez se usan los argumentos de simetría para concluir que el campo apunta en $\hat{r}$.

b)

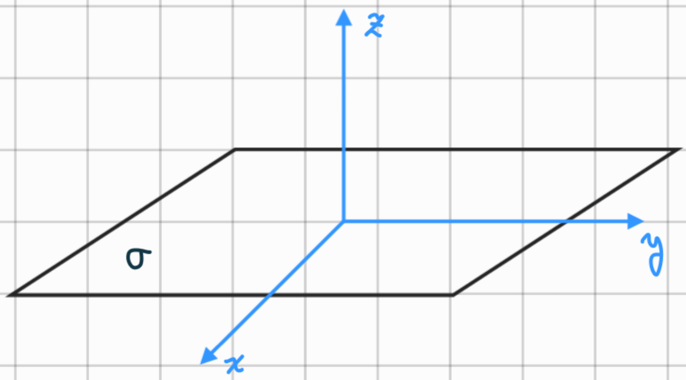
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r<a \\ \dfrac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r\in[a,2a] \\ \dfrac{ka}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r>2a \end{cases}$$



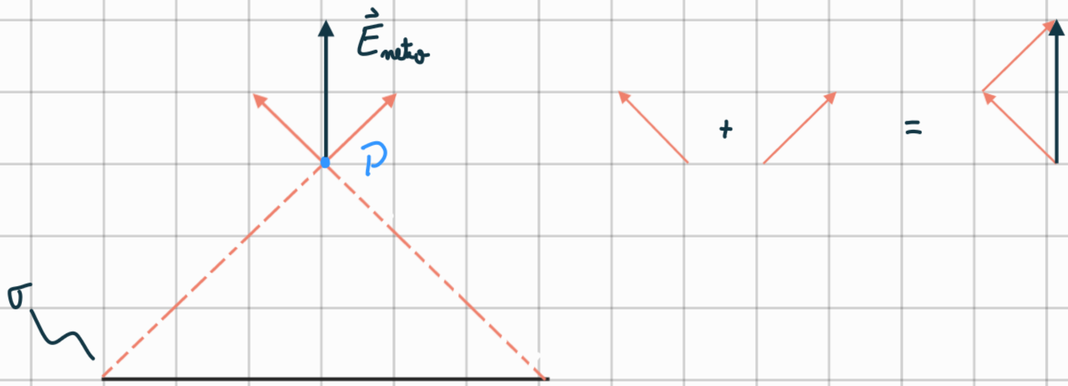
P_3)

Este problema puede ser resuelto mediante el principio de superposicion, es decir, primero calcularemos el campo electrico generado por la placa, y luego por el bloque, finalmente el campo total sera la suma de ambos.

Para calcular el campo de la placa, vamos a empezar centrando nuestro sistema de coordenadas en el centro de esta



Pensemos ahora en como se debería ver el campo para un punto *P* por sobre la placa

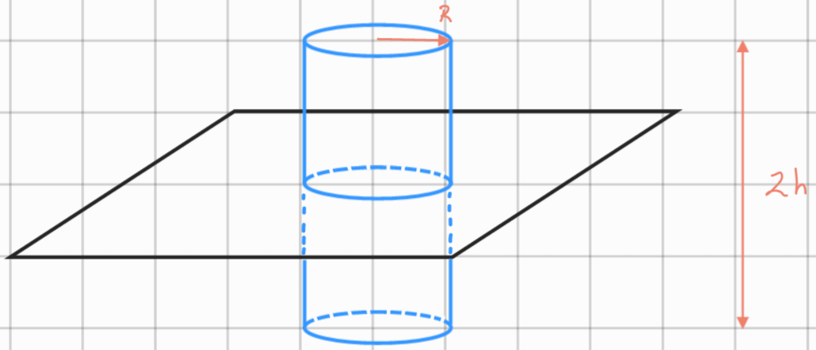


Podemos notar que para cada aporte del campo que provenga desde el lado izquierdo, existirá otro que vendrá desde el lado derecho que anulará la componente horizontal del campo. Y esto se cumple para cualquier punto sobre la placa, pues dado que esta es infinita, si nos movemos hacia la izquierda o la derecha, el plano se seguirá extendiendo infinitamente en todas las direcciones. También podemos pensar esto como que, dado que el plano es infinito, no importa donde nos coloquemos, siempre estaremos en su centro.
Este mismo análisis se puede realizar para un punto por debajo de la placa, donde se encuentra el mismo comportamiento para el campo, solo que ahora este apuntará en el sentido opuesto, o sea, hacia abajo.
Por otro lado, la densidad de carga es uniforme, o sea que esta no cambia con la posición, de modo que el campo no podrá tener dependencias de x ni de y.

Así concluimos que

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} E(z)\hat{z} & z>0 \\ E(z)(-\hat{z}) & z<0 \end{cases}$$

Teniendo esto, podemos usar la Ley de Gauss para calcular el campo eléctrico. Empecemos por dibujar nuestra superficie Gaussiana, para este caso lo más conveniente es usar un cilindro el cual tendrá un radio R y altura $2h$



La Ley de Gauss nos dice ahora que el flujo de campo eléctrico que atraviesa a este cilindro es igual a la carga encerrada por el cilindro, dividida por ε_0

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Calculemos el lado izquierdo.
Veamos que el cilindro se compone de 3 superficies, las tapas superior e inferior (T1 y T2) y el manto (M), por lo que podemos calcular el flujo que atraviesa al cilindro calculando el flujo que atraviesa a cada superficie por separado, o sea

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{T_1} \vec{E}\cdot d\vec{S}_1 + \int_{T_2} \vec{E}\cdot d\vec{S}_2 + \int_{M} \vec{E}\cdot d\vec{S}_3$$

El diferencial de superficie para las tapas es

$$dS = r\,dr\,d\varphi$$

Por otro lado, la Ley de Gauss nos dice que la superficie gaussiana escogida debe estar orientada hacia afuera, por lo tanto

$$d\vec{S}_1 = \hat{z}\, r\,dr\,d\varphi \qquad \text{y} \qquad d\vec{S}_2 = (-\hat{z})\, r\,dr\,d\varphi$$

Por su parte, el diferencial de superficie para el manto es

$$d\vec{S}_3 = \hat{r} R\, d\varphi\, dz$$

Reemplazando

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \vec{E}\cdot\hat{z}\, r\,dr\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \vec{E}\cdot(-\hat{z})\, r\,dr\,d\varphi + \int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi} \vec{E}\cdot\hat{r} R\, d\varphi\, dz$$

Y antes ya dedujimos la forma de **E**, por lo que también podemos hacer ese reemplazo

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\underbrace{\hat{z}\cdot\hat{z}}_{=1}\, r\,dr\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\underbrace{(-\hat{z})\cdot(-\hat{z})}_{=1}\, r\,dr\,d\varphi + \int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi} E(z)\underbrace{(\pm\hat{z})\cdot\hat{r}}_{=0} R\, d\varphi\, dz$$

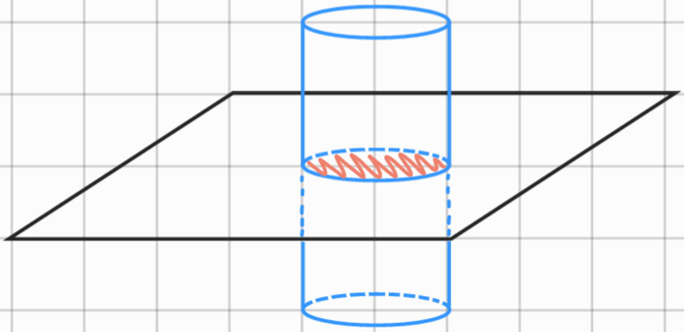
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\, r\,dr\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\, r\,dr\,d\varphi$$

*Notar que como la la tapa inferior se encuentra en $z < 0$ usamos $\vec{E} = E(z)(-\hat{z})$.
Ahora podemos sacar los $E(z)$ de las integrales pues no dependen de r ni de φ

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2E(z)\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,dr\,d\varphi = 2E(z)\pi R^2$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi R^2 E(z)}$$

Ahora calculamos la parte derecha de la Ley de Gauss.
La carga encerrada corresponde a la parte naranja en el dibujo de abajo



Dado que la densidad de carga es uniforme

$$Q_{enc} = \sigma \cdot Á_{rea}$$

$$\boxed{Q_{enc} = \sigma \cdot \pi R^2}$$

También podríamos haber calculado la carga encerrada como

$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \sigma \, r \, dr \, d\varphi \qquad (\text{Propuesto})$$

Ahora por Ley de Gauss

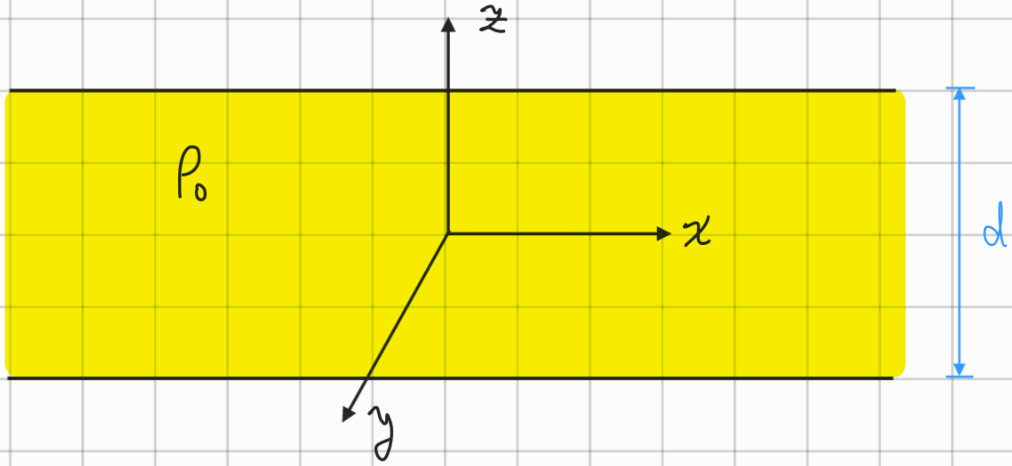
$$2\cancel{\pi} \cancel{R^2} E(z) = \frac{\cancel{\pi}\sigma \cancel{R^2}}{\varepsilon_0}$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

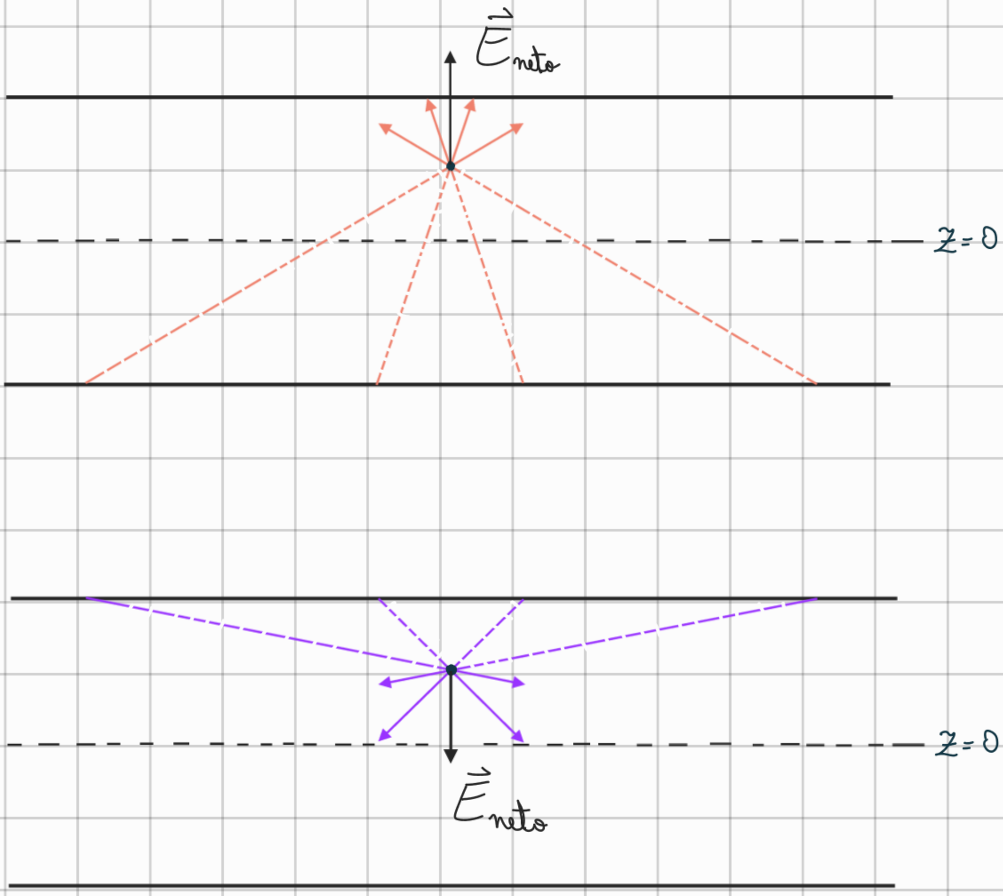
Y por los argumentos de simetría concluimos

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z > 0 \\[2ex] \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z < 0 \end{cases}}$$

Ahora calculamos el campo que genera el bloque.
En este caso centraremos el origen del sistema de coordenadas en el centro del bloque. Es importante notar que este origen **no** coincide con el que usamos para el plano en la parte anterior, aunque igualmente podemos calcular el campo así, solo deberemos corregir el sistema de coordenadas al final de todo



Analicemos el comportamiento del campo al interior del bloque

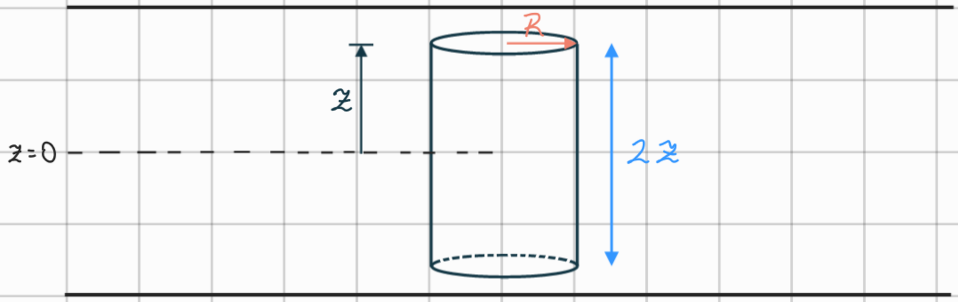


Se puede ver que las componente horizontales del campo se cancelan al igual que como ocurría con la placa infinita. Además, dado que tenemos un bloque macizo, para un punto por sobre $z = 0$ habrá más carga debajo de él que por encima, de modo que para para $z > 0$ el campo eléctrico apuntará hacia arriba.

De manera análoga se puede ver que el campo apuntará hacia abajo para $z < 0$. Además, como el bloque se extiende infinitamente en x e y, si nos movemos en estas direcciones no podremos notar ningún cambio, de forma que el campo no puede tener dependencias de estas coordenadas, por lo tanto

$$\vec{E} = \begin{cases} E(z)\,\hat{z} & z > 0 \\ E(z)\,(-\hat{z}) & z < 0 \end{cases}$$

Ahora resolvemos mediante Ley de Gauss.
Otra vez usamos como superficie gaussiana un cilindro, esta vez de radio R y altura $2z$



Al igual que en el caso de la placa, resolvemos el lado izquierdo de la Ley de Gauss

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\underbrace{\hat{z}\cdot\hat{z}}_{=1}\, r'dr'd\varphi' + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\underbrace{(-\hat{z})\cdot(-\hat{z})}_{=1}\, r'dr'd\varphi' + \int_{-z}^{z}\int_0^{2\pi} E(z)\underbrace{(\pm\hat{z})\cdot\hat{r}}_{=0}\, R\, d\varphi' dz'$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\, r'dr'd\varphi' + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\, r'dr'd\varphi'$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi R^2 E(z)}$$

Ahora el lado derecho

$$Q_{enc} = \int_{-z}^{z}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} \rho\, r' dr' d\varphi' dz = \rho \cdot 2z \cdot \cancel{2}\pi \frac{R^2}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{Q_{enc} = 2\pi R^2 \rho z}$$

$\therefore$

$$\cancel{2\pi R^2} E(z) = \frac{\cancel{2\pi R^2}\rho z}{\varepsilon_0}$$

$$E(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$$

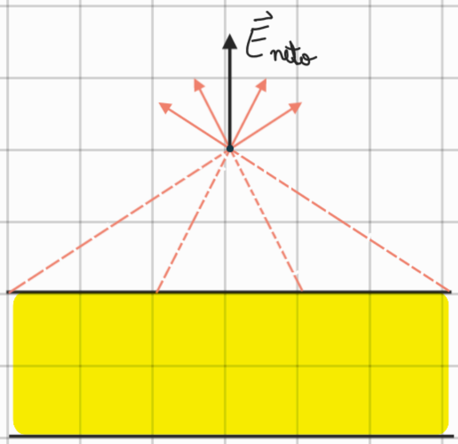
Y por los argumentos de simetría

$$\boxed{\vec{E}(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}\hat{z}} \qquad z \in \left[-d/2,\ d/2\right]$$

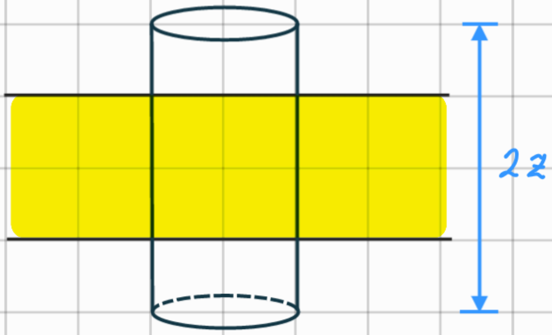
Ahora resolvemos fuera del bloque, es decir para $|z| > d/2$

De forma análoga al caso de la placa, se puede ver que el campo eléctrico fuera del bloque tiene la forma

$$\vec{E} = \begin{cases} E(z)\hat{z} & z > d/2 \\ E(z)\hat{z} & z < -d/2 \end{cases}$$



Colocamos nuestra superficie gaussiana



Aplicamos la Ley de Gauss

$$\underbrace{\oint_{S'} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\text{análogo a partes anteriores.}} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi R^2 E(z)}$$

Calculamos el lado derecho.
Notemos que solo tenemos densidad de carga dentro del bloque, o sea para $z' \in \left[\frac{-d}{2}, \frac{d}{2}\right]$ por lo que la integral en z' tendrá aquellos límites.

$$Q_{enc} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho\, r'dr'd\varphi dz' = d \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2}{2}\rho$$

$$\boxed{Q_{enc} = \pi R^2 \rho d}$$

$$\Rightarrow 2\cancel{\pi}\cancel{R^2} E(z) = \frac{\cancel{\pi}\cancel{R^2}\rho d}{\varepsilon_0}$$

$$E(z) = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

Y por los argumentos de simetría

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z > d/2 \\ -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z < -d/2 \end{cases}$$

Así el campo producido por el bloque es

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z > d/2 \\ \frac{\rho z}{\varepsilon_0}\hat{z} & z \in [-d/2, d/2] \\ -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z < -d/2 \end{cases}}$$

Ahora volvemos a nuestro sistema de referencia original, donde la placa se encuentra en $z = 0$

$$\boxed{\vec{E}_2 = \begin{cases} \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z > d \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0}(z - d/2)\hat{z} & z \in [0, d] \\ -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z < 0 \end{cases}}$$

Finalmente, por el principio de superposición, el campo total es

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \left(\frac{\rho d}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{z} & z > d \\ \left[\frac{\rho}{\varepsilon_0}(z - d/2) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right]\hat{z} & z \in [0, d] \\ -\left(\frac{\rho d}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{z} & z < 0 \end{cases}}$$

P4

a)

Podemos calcular la densidad de carga usando la forma diferencial de la Ley de Gauss. Recordemos que debemos usar la divergencia en coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

Como el campo no tiene componentes angulares, solo tenemos

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2 \cancel{\sin\theta}} \frac{\partial}{\partial r}\left(k r^3 \cdot r^2 \cancel{\sin\theta}\right) = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^5) = \frac{5k}{\cancel{r^2}} r^{\cancel{4}\,2}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 5kr^2 \Rightarrow \boxed{\rho = 5k\varepsilon_0 r^2}$$

b)

La primera forma es integrar la densidad de carga que acabamos de encontrar

$$Q = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} 5k\varepsilon_0 r^2\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = 5k\varepsilon_0 4\pi \int_0^R r^4\, dr$$

$$= \cancel{20}^{\,4}\pi\varepsilon_0 k \frac{R^5}{\cancel{5}} \qquad [k] = \frac{Q}{[\varepsilon_0]D^5}$$

$$\boxed{Q = 4\pi\varepsilon_0 k R^5}$$

Para la segunda podemos usar la forma integral de la Ley de Gauss

$$Q_{enc} = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$Q_{enc} = \varepsilon_0 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{k R^3 \hat{r}}_{*} \cdot \hat{r}\, R^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$= R^5 k \varepsilon_0 4\pi$$

$$\boxed{Q = 4\pi \varepsilon_0 k R^5}$$

* Como queremos el flujo sobre la superficie de una esfera de radio *R*, tenemos que evaluar el campo y el diferencial de superficie en $r = R$.