FI2002-2 Electromagnetismo
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliar: Felipe Carrasco V.

Auxiliar 1: Coulomb y distribuciones continuas

21 de diciembre de 2024

P1. Considere una cruz, de ancho y alto $2l$, hecha de un cable muy delgado cargado con una densidad de carga uniforme λ como se muestra en la Figura 1.

a) Sin realizar ningún cálculo, deduzca el sentido en el que apunta el campo eléctrico en un punto P ubicado a la derecha de la cruz y que está alineado con esta. Justifique.

b) Calcule el campo eléctrico en el punto P. Si ahora hay una carga de magnitud $2q$ en ese punto ¿qué fuerza experimenta?

c) ¿Qué ocurre cuando $x \gg l$?

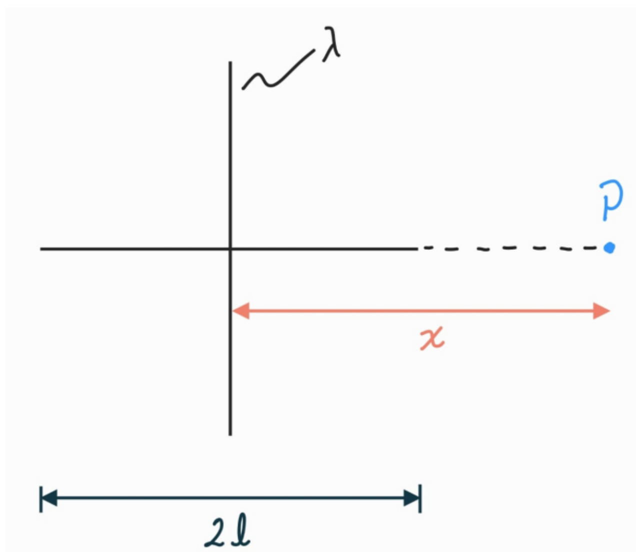

Figura 1: Cruz cargada.

P2. Como se muestra en la Figura 2, se tiene un disco delgado de radio b y densidad de carga superficial uniforme σ sobre el cual, a una altura h, se encuentra un alambre delgado de largo l y densidad de carga λ (también uniforme). Responda:

a) ¿Cuál es la fuerza que experimenta el alambre?

b) Si se le hace un agujero de radio a al disco ¿cómo es la fuerza que el alambre siente ahora?

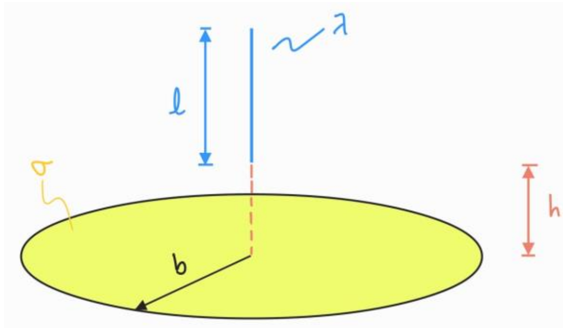

Figura 2.

P3. Si se tiene un cascarón esférico de radio R con densidad de carga superficial uniforme σ (Figura 3).

a) Calcule el campo eléctrico en el eje del cascarón dentro y fuera de este.

b) Generalice su resultado anterior para cualquier punto del espacio.

c) Plantee la integral de la parte a) pero ahora para una esfera maciza con densidad de carga volumétrica uniforme ρ.

d) **[Propuesto]** Resuelva la integral de la parte c).

[Hint]: Puede serle de utilidad saber que:

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{R - z\cos(\theta)}{z^2\sqrt{R^2 - 2Rz\cos(\theta) + z^2}}\right] = \frac{(z - R\cos(\theta))\sin(\theta)}{(z^2 + R^2 - 2zR\cos(\theta))^{3/2}}$$

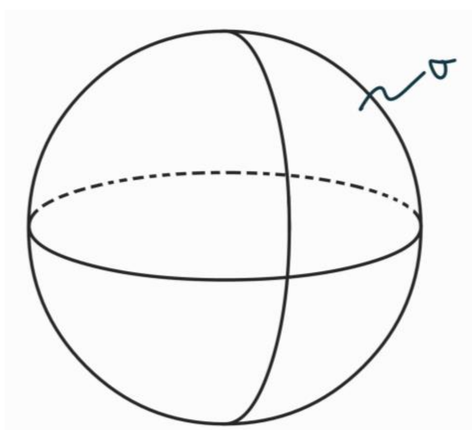

Figura 3: Cascarón cargado.

P4. Se tiene un cono delgado (como un barquillo de helado (mmm helado)) de generatriz L y semi-ángulo α, con densidad de carga superficial uniforme (para variar) σ. Si en el vértice de este cono se encuentra una carga puntual q (Figura 4a), responda:

a) ¿Cuál es la fuerza que experimenta la carga? Comente.

b) Ahora cortamos la mitad superior del cono y la tiramos (Figura 4b). Calcule la nueva fuerza que experimenta la carga puntual.

c) ¿Cuál es el ángulo α para el que se maximiza la fuerza de la parte anterior?

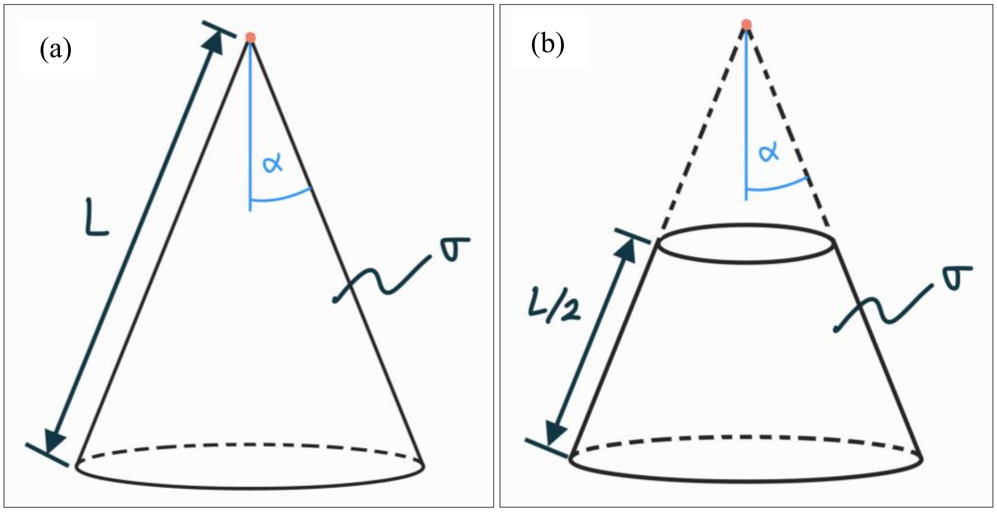

Figura 4: (a) Barquillo entero :) (b) Medio barquillo :(

Resumen

- **Ley de Coulomb:** La fuerza entre una carga fuente q ubicada en $\vec{r}'$ y una carga de prueba Q ubicada en $\vec{r}$ estará dada por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2} \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$$

- **Campo Eléctrico de una carga puntual:** El campo que se siente en $\vec{r}$ producido por una carga fuente q ubicada en $\vec{r}'$ estará dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2} \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = Q\vec{E}(\vec{r})$$

- **Campo Eléctrico para un conjunto de cargas puntuales:** El campo que se siente en $\vec{r}$ producido por un conjunto de N cargas puntuales estará dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k}{\left\|\vec{r}-\vec{r}_k'\right\|^2} \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}_k')}{\left\|\vec{r}-\vec{r}_k'\right\|}$$

  donde $\vec{r}_k'$ corresponde a la posición de la carga q_k.

- **Campo Eléctrico para una distribución continua de carga:** El campo que se siente en $\vec{r}$ producido por una distribución continua de carga en un espacio Ω (línea, superficie o volumen) estará dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} dq(\vec{r}')$$

  donde $\vec{r}'$ corresponde a la parametrización de la distribución $dq(\vec{r}')$ de carga de la fuente, la cual dependiendo del espacio Ω puede ser:

  - Lineal: $dq(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}')dl$
  - Superficial: $dq(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}')dS$
  - Volumétrica: $dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')dV$

- **Fuerza sobre una distribución continua:** La fuerza que experimenta una distribución continua de carga Λ debido a un campo eléctrico externo $\vec{E}$ es:

$$\vec{F} = \int_{\Lambda} \vec{E}(\vec{r})dq(\vec{r})$$