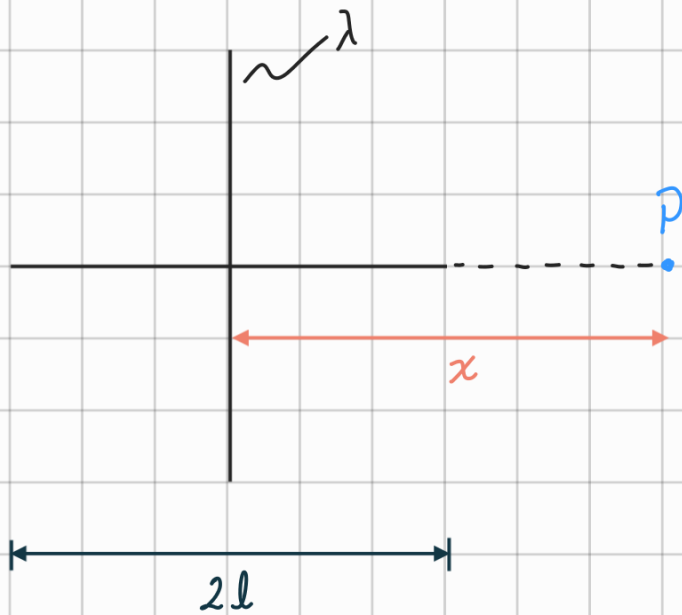
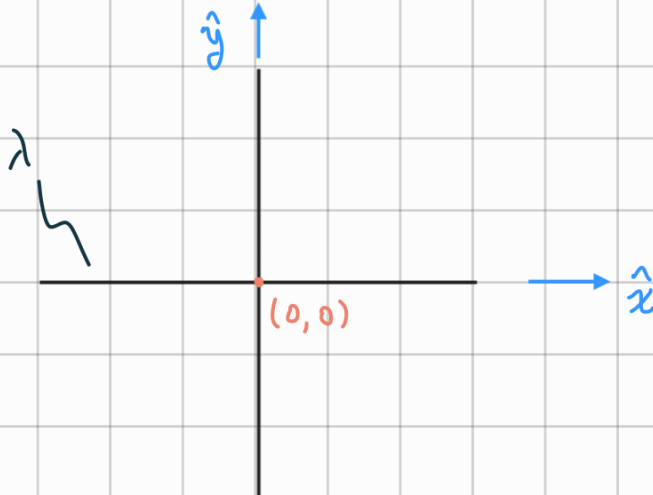


P₁



a)

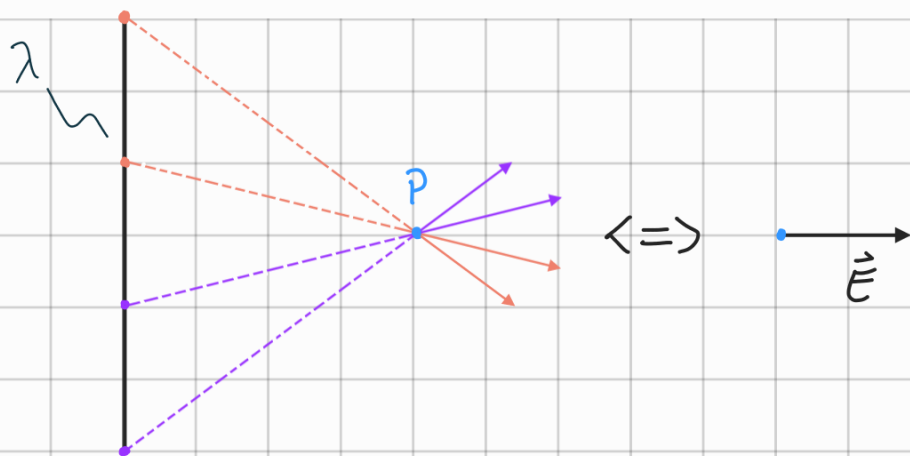
Antes que todo, debemos definir nuestro sistema de referencia. Una buena elección para este caso es colocar el origen del sistema en el centro de la cruz, de manera que $\hat{x}$ apunta hacia la derecha de la hoja, e $\hat{y}$ apunta hacia arriba:



Ahora resolveremos utilizando el principio de superposición, es decir, trataremos el sistema como si existieran 2 alambres distintos, uno vertical y otro horizontal, los cuales forman la cruz. De esta manera, el campo total será la suma de los campos generados por cada alambre.

Pensemos en el alambre vertical ¿En que sentido debería apuntar el campo eléctrico generado por este en nuestro punto de interés?

Aquí podemos pensar en el aporte que hace cada sección infinitesimalmente pequeña del alambre sobre el punto.



Podemos notar que cada sección del alambre que se encuentre por sobre el punto aporta un campo eléctrico que apunta hacia la derecha y abajo (flechas naranjas), mientras que cada sección que se encuentra debajo del punto aporta un campo que apunta hacia la derecha y arriba (flechas moradas). Como nuestro punto se encuentra en el medio del cable, tendremos que por cada flecha naranja existirá una flecha morada, de modo que los aportes de los campos que apuntan hacia arriba y hacia abajo se cancelarán, quedando únicamente la componente que apunta hacia la derecha (flecha negra), para nuestro sistema de referencia esto es $\hat{x}$.

Ahora vamos con el alambre horizontal, otra vez podemos pensar en el aporte que hace cada sección de este, sin embargo, debido a que nuestro punto de interés se encuentra alineado con el eje del alambre, es fácil notar que cada punto de este hará un aporte hacia la derecha, de manera que el campo eléctrico que genera el cable horizontal apuntará en $\hat{x}$.



Finalmente, dada que las contribuciones de cada cable apuntan en $\hat{x}$, la suma de estas, i.e., el campo total, también apuntará en la misma dirección.

b)

Como dijimos antes, calcularemos el campo total haciendo uso del Principio de Superposición, por lo que primero calcularemos el campo generado por el alambre vertical.

Para esto, usamos la definición del campo eléctrico para una distribución continua:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq(\vec{r}')$$

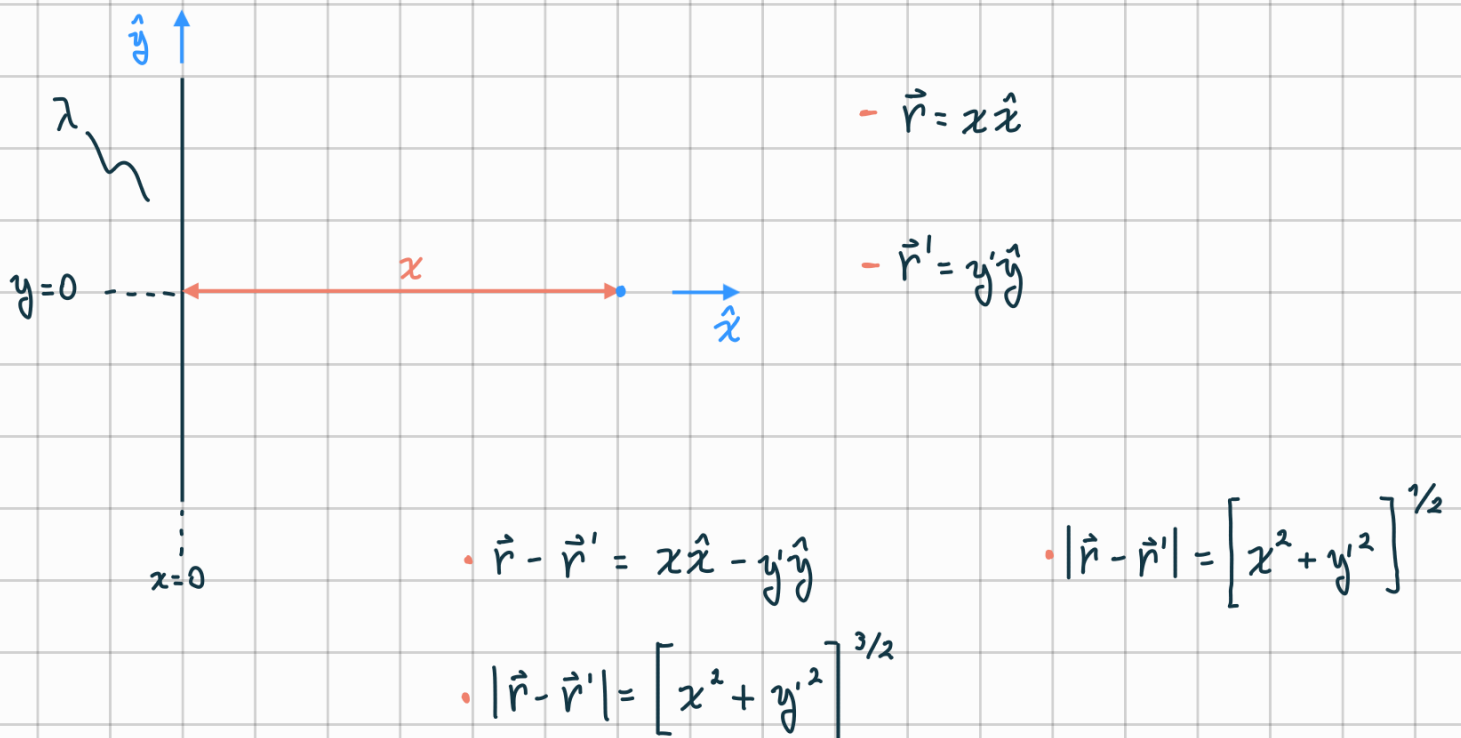
En esta fórmula

$\vec{r}$ es el lugar donde queremos calcular $\vec{E}$.

$\vec{r}'$ es el vector que parametriza nuestra distribución de carga, o sea, el vector que nos dice dónde se encuentra la carga que da origen al campo.

$dq(\vec{r}')$ es el diferencial de carga, puede pensarse como un "pedacito" infinitesimalmente pequeño de la distribución.

Para una distribución de carga lineal, tenemos que $dq(\vec{r}') = \lambda dy'$. Esto porque el alambre vertical se encuentra sobre el eje y de nuestro sistema de coordenadas. Además tendremos una integral simple, pues el alambre es unidimensional.



Como el alambre solo existe para $y' \in [-l, l]$, los límites de la integral serán $-l$ y l .

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{x\hat{x} - y'\hat{y}}{[x^2 + y'^2]^{3/2}} \lambda dy'$$

Ahora solo matraqueamos

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{-l}^l \frac{x\hat{x}}{[x^2 + y'^2]^{3/2}} dy' - \int_{-l}^l \frac{y'\hat{y}}{[x^2 + y'^2]^{3/2}} dy' \right]$$

↪
Función impar integrada en
intervalo simétrico = 0

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{x\hat{x}}{[x^2 + y'^2]^{3/2}} dy' = \frac{x\lambda\hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{dy'}{[x^2 + y'^2]^{3/2}} ; \quad \begin{array}{l} \text{C.V.} \\ y' = x \operatorname{tg}(u) \\ dy' = x \sec^2(u) \end{array}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{x\lambda\hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{x^2\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{-l}^l = \frac{x\lambda\hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{l}{x^2\sqrt{x^2 + l^2}} + \frac{l}{x^2\sqrt{x^2 + l^2}} \right)$$

$$\vec{E}_1 = \frac{x\lambda\hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \frac{2l}{x^2\sqrt{x^2 + l^2}}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2l\lambda}{x\sqrt{x^2 + l^2}} \hat{x}$$

Ahora calculamos el campo generado por el alambre horizontal



$$-\vec{r} = x \hat{x}$$

$$-\vec{r}' = x' \hat{x}$$

$$-\vec{r} - \vec{r}' = (x - x') \hat{x}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2} = |x - x'|$$

Dado que $x' \in [-l, l]$ y $x > l \Rightarrow x - x' > 0$

$$\therefore -|\vec{r} - \vec{r}'| = x - x'$$

$$-|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (x - x')^3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{(x - x') \hat{x}}{(x - x')^3} \lambda dx' = \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{(x - x')}{(x - x')^3} dx' \\ &= \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{dx'}{(x - x')^2} ; \quad \begin{array}{l} \text{c.v.} \\ u = x - x' \\ du = -dx' \end{array} \rightarrow K \int_{-l}^l \frac{-du}{u^2} = -K \left(\frac{-1}{u} \right) \Big|_{-l}^l \\ &= \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x - x'} \Big|_{-l}^l = \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x - l} - \frac{1}{x + l} \right] \\ &= \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(x + l) - (x - l)}{(x - l)(x + l)} \right] = \frac{\lambda \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \frac{2l}{x^2 - l^2} \end{aligned}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2l\lambda}{(x^2 - l^2)} \hat{x}$$

Notemos que tal como dedujimos en la primera parte, ambos campos apuntan en $\hat{x}$.

Finalmente, en virtud del principio de superposición, el campo total será la suma del campo generado por cada alambre, o sea:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2l\lambda}{x\sqrt{x^2+l^2}} + \frac{2l\lambda}{(x^2-l^2)} \right] \hat{x}$$

Definiendo $q \equiv 4l\lambda$ (carga total presente en la cruz)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{2x\sqrt{x^2+l^2}} + \frac{q}{2(x^2-l^2)} \right] \hat{x}$$

$$\vec{F} = q \vec{E} \Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q^2}{x\sqrt{x^2+l^2}} + \frac{q^2}{(x^2-l^2)} \right] \hat{x}$$

c) $x \gg l$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{2x\sqrt{x^2+l^2}} + \frac{q}{2(x^2-l^2)} \right] \hat{x} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{2x\sqrt{x^2(1+l^2/x^2)}} + \frac{q}{2x^2(1-l^2/x^2)} \right] \hat{x} \end{aligned}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{2x^2\sqrt{1+(l/x)^2}} + \frac{q}{2x^2[1-(l/x)^2]} \right] \hat{x}$$

$$x \gg l \Rightarrow (l/x)^2 \approx 0$$

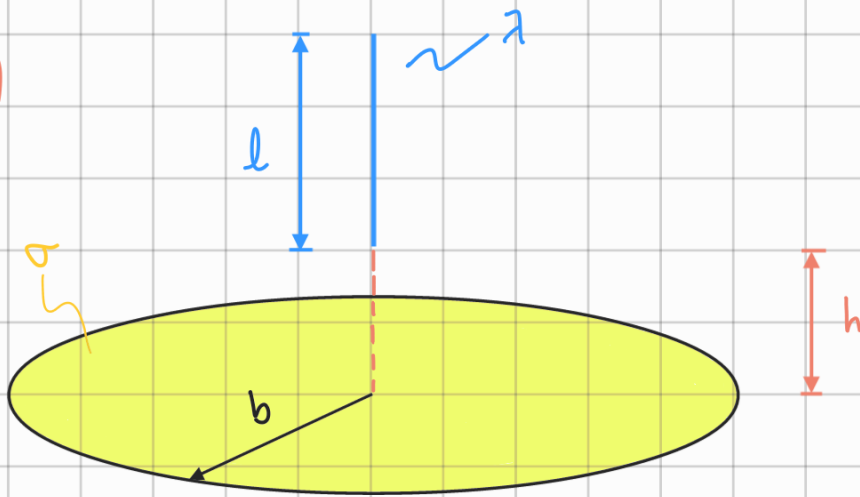
$$\therefore \vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{2x^2} + \frac{q}{2x^2} \right] \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2q}{2x^2} \right] \hat{x}$$

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \hat{x}$$

Para $x \gg l$ el campo eléctrico se aproxima al de una carga puntual.

P₂

a)



Para calcular la fuerza sobre el alambre, primero obtendremos el campo eléctrico del disco sobre su eje (lugar donde se encuentra el alambre). Para este caso y dada la geometría, lo más conveniente es usar coordenadas cilíndricas, colocando el origen del sistema en el centro del disco.

Dada esta elección para el sistema de coordenadas, el lugar donde queremos calcular el campo eléctrico (el eje del disco) cae justo sobre el eje z , por tanto:

$$\vec{r} = z \hat{z}$$

Además, nuestra carga se encuentra distribuida sobre el disco de radio b , por lo que esta puede ser parametrizada como:

$$\vec{r}' = r' \hat{r} \quad \text{donde } r' \in [0, b] \quad \leftarrow \text{intervalo donde existe el disco.}$$

De esto sigue que

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \hat{z} - r' \hat{r} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = [z^2 + r'^2]^{1/2} \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = [z^2 + r'^2]^{3/2}$$

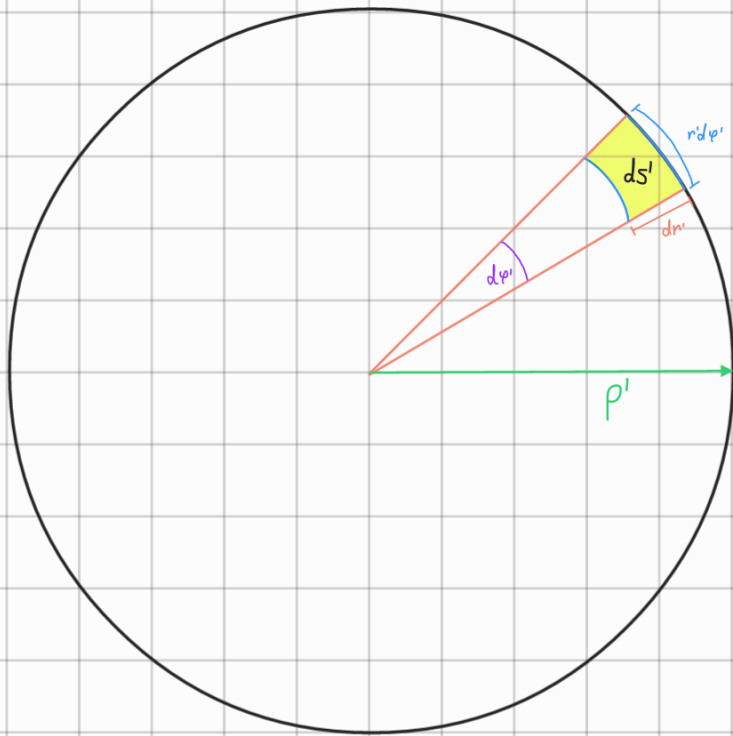
Y dado que tenemos un disco completo (que da una vuelta entera) $\varphi \in [0, 2\pi)$

Finalmente, puesto que estamos trabajando con una distribución de carga superficial, nuestro diferencial de carga será

$$dq(\vec{r}') = \sigma dS'$$

Donde dS' corresponde a un elemento de superficie del disco, es decir, un pedacito muy pequeño de la superficie. Este puede ser obtenido de forma geométrica como sigue:

Si miramos el disco desde arriba



$d\varphi'$ es un ángulo infinitesimal (muy pequeño)

dr' es un trozo infinitesimal de r'

$$\Rightarrow dS' = r' dr' d\varphi'$$

↓
Elemento de área.

Así entonces

$$dS' = r' dr' d\varphi'$$

Y al tener un diferencial de superficie, tendremos que resolver una integral de superficie (integral doble). Es decir:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{z\hat{z} - r'\hat{r}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} \sigma r' dr' d\varphi' \quad (*)$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{z\hat{z}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi' - \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'\hat{r}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi' \right]$$

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{z\hat{z}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi'}_{I_1} - \underbrace{\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'\hat{r}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi'}_{I_2}$$

$$I_1 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{\hat{z}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi'$$

$$I_1 = \frac{\sigma \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r' dr' d\varphi'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} ; \quad z \text{ y } \hat{z} \text{ son const. respecto a las variables de integración.}$$

El Teorema de Fubini nos permite escribir esto como

$$I_1 = \frac{\sigma \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi'}_{=2\pi} \times \int_0^b \frac{r' dr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} = \frac{\sigma \hat{z}}{2\epsilon_0} \cancel{4\pi} \int_0^b \frac{r' dr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}}$$

$$I_1 = \frac{\sigma \hat{z}}{2\epsilon_0} \int_0^b \frac{r' dr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} ; \quad \begin{array}{l} \text{C.V.} \\ u = z^2 + r'^2 \\ du = 2r' dr' \end{array}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\sigma \hat{z}}{2\epsilon_0} \times \frac{-1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \Big|_0^b = \frac{\sigma \hat{z}}{2\epsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \Big|_b^0$$

$$= \frac{\sigma \hat{z}}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right]$$

$$I_1 = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right] \hat{z}$$

$$I_2 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r' \hat{r}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi' = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'^2 \hat{r}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr' d\varphi'$$

Notemos que apesar de que $\hat{r}$ es un vector unitario, no podemos sacarlo de la integral, pues este depende de φ . En coordenadas cilíndricas se cumple que

$$\hat{r} = \cos\varphi' \hat{x} + \sin\varphi' \hat{y}$$

reemplazando en la integral

$$I_2 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'^2 (\cos\varphi' \hat{x} + \sin\varphi' \hat{y})}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr' d\varphi'$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'^2 \cos\varphi' \hat{x}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr' d\varphi' + \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'^2 \sin\varphi' \hat{y}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr' d\varphi'$$

$$= \frac{\sigma \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi' d\varphi'}_{=0} \times \int_0^b \frac{r'^2 dr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} + \frac{\sigma \hat{y}}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi' d\varphi'}_{=0} \times \int_0^b \frac{r'^2 dr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = 0}$$

$$\therefore \vec{E}_z(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right] \hat{z}$$

Si consideramos $z > 0 \Rightarrow |z| = z$, así:

$$\vec{E}_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \hat{z}$$

Sabemos que para una carga puntual, la fuerza que esta experimenta debido a un campo eléctrico externo es $F = qE$. Pero en este caso tenemos una distribución continua de carga, y no una carga puntual, por lo que para calcular la fuerza que esta experimenta, tendremos que calcular la fuerza que siente cada pedacito infinitesimalmente pequeño del alambre y sumar todos estos valores, lo cual es equivalente a integrar el campo eléctrico sobre la distribución de carga del alambre, o sea

$$\vec{F} = \int \vec{E} dq$$

Dado que el alambre se ubica sobre el eje z entre h y $h + l$ la integral será

$$\vec{F} = \int_h^{h+l} \vec{E} \lambda dz$$

Y el campo eléct externo es simplemente el que calculamos anteriormente

$$\vec{F} = \int_h^{h+l} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \hat{z} \lambda dz$$

$$= \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2\epsilon_0} \int_h^{h+l} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) dz$$

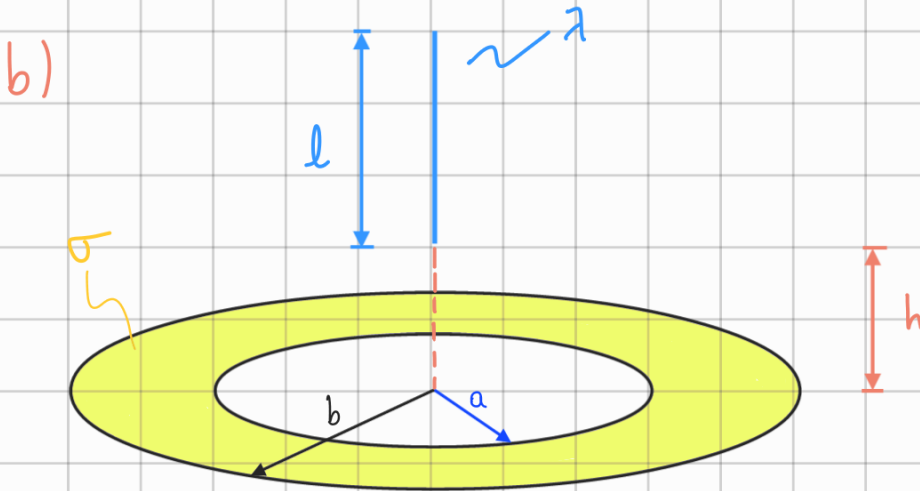
$$= \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2\epsilon_0} \left[\int_h^{h+l} dz - \int_h^{h+l} \frac{z dz}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right]$$

$$\vec{F} = \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2 \epsilon_0} \left[l - \int_h^{h+l} \frac{z \, dz}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right];$$

C.V.
 $u = b^2 + z^2$
 $du = 2z \, dz$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2 \epsilon_0} \left[l - \sqrt{b^2 + z^2} \right]_h^{h+l}$$

$$\vec{F} = \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2 \epsilon_0} \left(l - \sqrt{b^2 + (h+l)^2} + \sqrt{b^2 + h^2} \right)$$



Para este caso, la única diferencia con la parte anterior es que ahora $r' \in [a, b]$ que es el nuevo intervalo en donde existe el disco. Por lo que la integral en r' ahora irá entre a y b . Usando lo que ya sabemos (*)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{z\hat{z} - r'\hat{r}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} \sigma r' dr' d\varphi'$$

La resolución es igual a la anterior, lo que nos lleva a

$$\vec{E} = \frac{\sigma z \hat{z}}{2 \epsilon_0} \times \frac{-1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \Big|_a^b = \frac{\sigma z \hat{z}}{2 \epsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \Big|_b^a$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \hat{z}$$

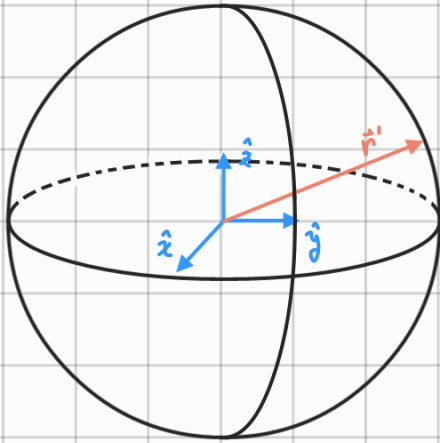
$$\vec{F} = \int_h^{h+l} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \hat{z} \lambda dz$$

$$= \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2\epsilon_0} \int_h^{h+l} \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} dz$$

$$= \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2\epsilon_0} \times \left[\sqrt{a^2 + z^2} \Big|_h^{h+l} - \sqrt{b^2 + z^2} \Big|_h^{h+l} \right]$$

$$\vec{F} = \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + (h+l)^2} - \sqrt{a^2 + h^2} - \sqrt{b^2 + (h+l)^2} + \sqrt{b^2 + h^2} \right)$$

P_3



Para esta distribución, la elección más natural son las coordenadas esféricas, con el origen del sistema en el centro del cascarón.

Dado que la carga se encuentra únicamente en $r' = R$ tenemos que:

$$\vec{r}' = R \hat{r}$$

Como queremos conocer el campo eléctrico en el eje de la esfera, el cual se alinea con el eje z

$$\vec{r} = z \hat{z}$$

$$\begin{aligned} (z \hat{z} - R \hat{r}) \cdot (z \hat{z} - R \hat{r}) &= z^2 - zR \hat{z} \cdot \hat{r} - Rz \hat{r} \cdot \hat{z} + R^2 \\ &= z^2 + R^2 - 2zR \hat{r} \cdot \hat{z} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \hat{z} - R \hat{r} \quad \cdot \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = \left(z^2 + R^2 - 2zR \hat{r} \cdot \hat{z} \right)^{3/2}$$

Por otro lado, al tener una carga superficial, el diferencial de carga será

$$dq(\vec{r}') = \sigma dS'$$

donde dS' es el diferencial de superficie para el cascarón esférico, el cual es

$$dS' = R^2 \sin \theta d\varphi d\theta$$

Lo que implica que

$$dq(\vec{r}') = \sigma R^2 \sin \theta d\varphi d\theta$$

Como tenemos un cascarón completo, tenemos que

$$\varphi' \in [0, 2\pi) \quad \theta \in [0, \pi]$$

Reemplazando en la definición de campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{z} - R\hat{r}}{(z^2 + R^2 - 2zR\hat{r}\cdot\hat{z})^{3/2}} \sigma R^2 \sin\theta d\varphi d\theta$$

En coordenadas esféricas se tiene que

$$\hat{r} = \cos\varphi \sin\theta \hat{x} + \sin\varphi \sin\theta \hat{y} + \cos\theta \hat{z} \Rightarrow \hat{r} \cdot \hat{z} = \cos\theta$$

Reemplazando

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{z} - R\cos\varphi \sin\theta \hat{x} - R\sin\varphi \sin\theta \hat{y} - R\cos\theta \hat{z}}{(z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta)^{3/2}} \sin\theta d\varphi d\theta$$

$\cos\varphi$ y $\sin\varphi$ están siendo integrados en un periodo, lo que da 0.

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{z} - R\cos\theta \hat{z}}{(z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta)^{3/2}} \sin\theta d\varphi d\theta$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{(z - R\cos\theta) \sin\theta d\theta}{(z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{R - z\cos\theta}{z^2 \sqrt{R^2 - 2Rz\cos\theta + z^2}} \right) = \frac{(z - R\cos\theta) \sin\theta}{(z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} \left(\frac{r - z\cos\theta}{z^2 \sqrt{r^2 - 2rz\cos\theta + z^2}} \right) d\theta$$

La integral de una derivada es simplemente el argumento de la derivada, o sea

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{2\epsilon_0} \left. \frac{R - z \cos \theta}{z^2 \sqrt{R^2 - 2Rz \cos \theta + z^2}} \right|_0^\pi$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{2\epsilon_0 z^2} \left[\frac{R+z}{\sqrt{R^2 + 2Rz + z^2}} - \frac{R-z}{\sqrt{R^2 - 2Rz + z^2}} \right]$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\cos 0 = 1$$

$$= \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{2\epsilon_0 z^2} \left[\frac{R+z}{\sqrt{(R+z)^2}} - \frac{R-z}{\sqrt{(R-z)^2}} \right]$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{2\epsilon_0 z^2} \left(\frac{R+z}{|R+z|} - \frac{R-z}{|R-z|} \right)$$

Asumiendo $z > 0 \Rightarrow |R+z| = R+z$

$\therefore$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{2\epsilon_0 z^2} \left(\frac{R+z}{R+z} - \frac{R-z}{|R-z|} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 z^2} \left(1 - \frac{R-z}{|R-z|} \right) \hat{z}$$

Dentro del cascarón $z < R \Rightarrow |R-z| = R-z$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 z^2} \left(1 - \frac{R-z}{R-z} \right) \hat{z} = \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{2\epsilon_0 z^2} (1-1)$$

$$\vec{E} = 0$$

Fuera del cascarón $z > R \Rightarrow |R-z| = z-R$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{2\epsilon_0 z^2} \left(1 - \frac{z-R}{z-R} \right) = \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{2\epsilon_0 z^2} \left(1 - \frac{-(R-z)}{R-z} \right) = \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{2\epsilon_0 z^2} \left(1 + \frac{R-z}{R-z} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{2\epsilon_0 z^2} \times 2 = \frac{\sigma R^2 \hat{z}}{\epsilon_0 z^2}$$

Dado que la carga esta distribuida de forma uniforme en el cascarón y nombrando q a la carga total, podemos escribir la densidad de carga como

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

$4\pi r^2$ es el área de la esfera

Reemplazando en el último resultado

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi R^2} \times \frac{R^2 \hat{z}}{\epsilon_0 z^2}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 z^2} \hat{z}$$

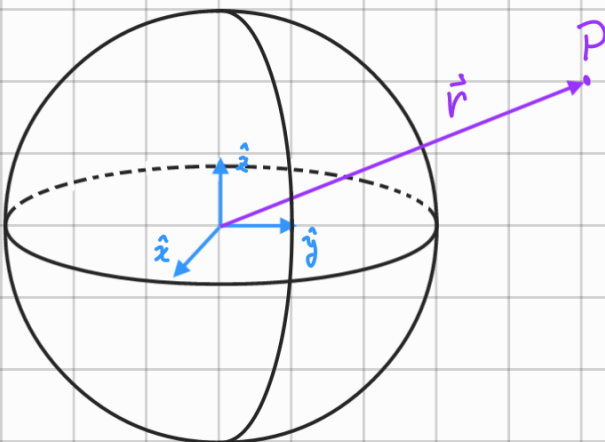
Este campo es sospechosamente similar al de una carga puntual.

(where's my point charge? *suspiciously point charge shaped electric field*) Ok, perdón el meme fome.

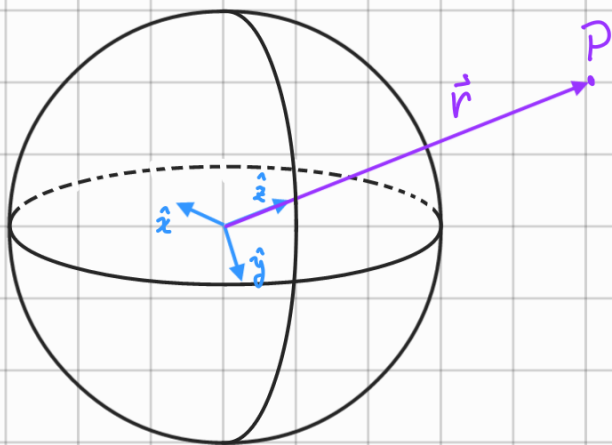
b)

Pero notemos una cosa. Si bien calculamos el campo eléctrico en el eje z de la esfera, debido a la simetría esférica, esto se puede generalizar para cualquier punto del espacio.

Supongamos que ahora queremos calcular el campo en un punto P que no se encuentra contenido en el eje z



Pues no hay problema, solo debemos redefinir nuestro sistema de coordenadas de modo que el eje z quede alineado con el punto P , pues esto no hace ningún cambio en la física del problema



De esta manera, solo tendremos que resolver el mismo problema que antes y llegaremos al mismo resultado.

Y esto tiene mucho sentido, después de todo, la carga está distribuida uniformemente en el cascarón, por lo que si damos vueltas alrededor de este a una distancia fija del centro, veremos siempre lo mismo. Si estuviésemos en el espacio intergaláctico, estar un metro "arriba" de la esfera es una situación indistinguible de estar un metro por "debajo".

De esta manera podemos generalizar nuestro resultado anterior para cualquier punto del espacio

$$\vec{E} = 0 \quad r < R$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad r > R$$

Para $r > R$ tenemos que el campo eléctrico es idéntico al campo de una carga puntual.

c)

Para este caso, tenemos que la carga está distribuida por todo el interior de la esfera, por lo tanto tenemos que

$$\vec{r}' = r' \hat{r} \quad \text{con } r' \in (0, R]$$

Por otro lado, buscamos calcular el campo en el eje z de nuevo, por lo que otra vez tenemos que

$$\vec{r} = z\hat{z}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - r'\hat{r}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (z^2 + r'^2 - 2zr'\hat{r} \cdot \hat{z})^{3/2}$$

$$\hat{r} \cdot \hat{z} = \cos \theta' \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (z^2 + r'^2 - 2zr'\cos \theta')^{3/2}$$

Al tener una distribución volumétrica, el diferencial de carga es

$$dq(\vec{r}') = \rho dV'$$

donde dV' es un diferencial de volumen, en coordenadas esféricas este vale

$$dV' = r'^2 \sin \theta' dr' d\varphi' d\theta'$$

Por lo tanto

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z\hat{z} - r'\hat{r}}{(z^2 + r'^2 - 2zr'\cos \theta')^{3/2}} \rho r'^2 \sin \theta' dr' d\varphi' d\theta'$$

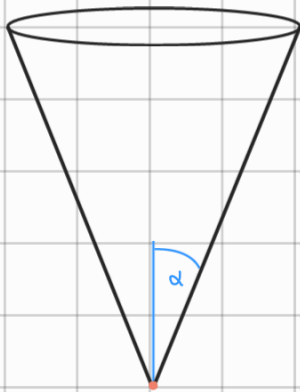
P4

a)



En principio se podría pensar que las coordenadas más adecuadas para este sistema son las coordenadas cilíndricas, y aunque es posible aplicar las coordenadas cilíndricas aquí, existe una mejor elección que simplifica el problema.

Si rotamos el sistema (cosa que no cambia la física del problema) tenemos lo siguiente:



Haciendo esto podemos ubicar el origen de nuestro sistema de coordenadas en la punta del cilindro y utilizar coordenadas esféricas para resolver



$$\vec{r} = 0$$

$$\vec{r}' = r' \hat{r}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -r' \hat{r}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r' \rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = r'^3$$

Dado que tenemos una distribución de carga superficial, deberemos resolver una

integral de superficie (integral doble), cuyo diferencial de carga es:

$$dq(\vec{r}') = \sigma r' \sin \theta' dr' d\varphi'$$

Puesto que el cono tiene una generatriz de largo L , la integral en r deberá ir desde 0 a L . Por otro lado, dado que el cono da una vuelta entera, la integral en φ irá entre 0 y 2π . Así tenemos:

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{-r' \hat{r}}{r'^3} \sigma r' \sin \theta' dr' d\varphi'$$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\hat{r}}{r'} \sin \theta' dr' d\varphi'$$

Notemos que aunque $\hat{r}$ es un vector unitario, no podemos sacarlo fuera de la integral, puesto que este depende de φ .

En coordenadas esféricas tenemos que:

$$\hat{r} = \cos \varphi \sin \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

reemplazando en la integral

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\cancel{\cos \varphi' \sin \theta' \hat{x}} + \cancel{\sin \varphi' \sin \theta' \hat{y}} + \cos \theta' \hat{z}}{r'} \sin \theta' dr' d\varphi'$$

Al integrar las funciones seno y coseno entre 0 y 2π el resultado es 0.

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\cos \theta' \hat{z}}{r'} \sin \theta' dr' d\varphi'$$

Ahora podemos darnos cuenta de que dada la forma en la que elegimos nuestro sistema de coordenadas, el cono solo "existe" (está ubicado) en $\theta' = \alpha$, por lo que podemos hacer este reemplazo en la integral también

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\cos\alpha \hat{z}}{r'} \sin\alpha \, dr' d\psi'$$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cos\alpha \sin\alpha \hat{z} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{1}{r'} dr' d\psi' = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cos\alpha \sin\alpha \hat{z} \int_0^L \frac{dr'}{r'}$$

$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\psi'}_{=2\pi}$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\ln(2\alpha)}{2} \hat{z} \int_0^L \frac{dr'}{r'} \quad (\star) \quad ; \quad \ln(2\alpha) = 2 \cos\alpha \sin\alpha$$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{4\epsilon_0} \ln(2\alpha) \hat{z} \ln(r') \Big|_0^L$$

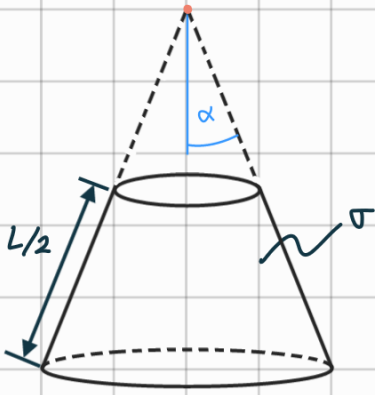
$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{4\epsilon_0} \ln(2\alpha) \hat{z} [\ln(L) - \ln(0)]$$

Hay un "problema" con el resultado al que llegamos, pues el logaritmo natural de 0 no está bien definido, o bien, diverge. Esto no es un error de cálculo, el resultado es correcto. Si quisiéramos hacer una lectura física de esto, podemos decir que el campo eléctrico en la punta del cono es "infinitamente" intenso. La razón de esto es que la distribución de carga que tenemos es superficial (carga por unidad de área), pero en la punta del cono esta área tiende a cero, de modo que habría una densidad infinita de carga en ese lugar.

Por supuesto un campo eléctrico de magnitud infinita no puede existir, este resultado es producto de asumir que la carga se distribuye sobre una superficie bidimensional, lo cual es solo una aproximación, ya que tal cosa no existe en el mundo real, pues nuestra realidad tiene 3 dimensiones espaciales (hasta donde sabemos). De forma más realista, toda distribución de carga es en realidad volumétrica (aunque esto tampoco es tan cierto xd).

b)

Ahora tenemos el siguiente sistema



La solución es análoga a la anterior, volteamos el cono, colocamos el origen en el vértice y resolvemos ocupando coordenadas esféricas.

El procedimiento es igual al que hicimos antes, con la única excepción de que ahora la integral sobre r se debe hacer entre $L/2$ y L , que es la nueva zona donde se ubica nuestra distribución de carga. Por lo que haciendo uso de lo que ya sabemos (★)

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\sin(2\alpha)}{2} \hat{z} \int_{L/2}^L \frac{dr'}{r'}$$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{4\epsilon_0} \sin(2\alpha) \hat{z} \left[\ln(L) - \ln(L/2) \right] = \frac{-\sigma}{4\epsilon_0} \sin(2\alpha) \hat{z} \ln\left(\frac{L}{L/2}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{4\epsilon_0} \sin(2\alpha) \ln(2) \hat{z}$$

De forma que la fuerza es

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{F} = \frac{-q\sigma}{4\epsilon_0} \sin(2\alpha) \ln(2) \hat{z}$$

c)

Para maximizar la fuerza podemos darle su corte industrial y derivar e igualar a 0. Pero podemos hacerlo más rápido que eso.

Sabemos que el máximo de la función seno es 1, por lo que solo debemos encontrar el valor de α tal que se cumpla aquello.

$$\sin(2\alpha') = 1 \implies 2\alpha' = \frac{\pi}{2} (2m+1) \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\alpha' = \frac{\pi}{4} (2m+1)$$

Por otro lado, valores de α iguales o mayores a $\pi/2$ no tienen sentido, pues para $\alpha = \pi/2$ el cono se convierte en un disco y para $\alpha > \pi/2$ el cono se "voltea". De esta manera, el único valor que puede tomar α tal que se maximice la fuerza es $\pi/4$ (45°), o sea

$$\alpha' = \pi/4$$