Análisis vectorial

Rudy García

I. Introducción

EL siguiente documento entrega nociones básicas con un enfoque práctico en cuanto al análisis y cálculo vectorial utilizado en el curso de Electromagnetismo impartido por la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile. Se recomienda su utilización como un material de apoyo al momento del estudio.
Septiembre 09, 2018

A. Definiciones generales

- *Vector*: Magnitud física definida en un **sistema de referencia** que se caracteriza por tener **módulo**, **dirección** y **sentido**. *Notación:* $\vec{F}$.

- *Escalar:* Magnitud física que se expresa por un solo **número** y tiene el mismo valor para todos los observadores. *Ejemplo:* masa, longitud, tiempo.

- *Campo vectorial:* Un campo vectorial representa la distribución espacial de una magnitud vectorial. Es una expresión de cálculo vectorial que asocia un vector a cada punto en el espacio euclidiano. Para este curso tomaría la siguiente forma:

$$\varphi : R^3 \to R^3$$

  Ejemplo: El campo eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ son campos vectoriales.

- *Campo escalar:* En física un campo escalar representa la distribución espacial de una magnitud física. Como expresión matemática, un campo escalar en el espacio tomaría la siguiente forma:

$$\varphi : R^3 \to R$$

  Ejemplo: El potencial electrostático es un campo escalar.

II. Operaciones vectoriales

Sean tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en R^3. Se definen las siguientes operaciones vectoriales:

1) *Adición de dos vectores:* Si $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ubique la cola del vector $\vec{B}$ en la punta del vector $\vec{A}$, entonces, $\vec{C}$ queda definido como el vector que inicia en la cola de $\vec{A}$ y termina en la punta de $\vec{B}$. La adición es **conmutativa** y **asociativa**. La resta puede verse como la adición del opuesto a un vector, $-\vec{A}$, por ejemplo. Además, analíticamente esta operación se realiza sumando o restando componente a componente de los vectores involucrados.

2) *Multiplicación por escalar:* Sea $k \in R$ un escalar. Al multiplicar por un escalar se multiplica su magnitud y deja su dirección igual. La multiplicación por un escalar es **distributiva**. *Notación*: $k\vec{A}$.

3) *Norma euclidiana*: La norma euclidiana es una de las normas más recurrentes en física debido a la versatilidad y propiedades que tiene. Esta representa la longitud o magnitud de un vector. Para el caso de vectores en R^3 se obtiene como:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

4) *Producto punto:* El producto punto entre dos vectores se define de la siguiente forma

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv |A|\,|B| \cos\theta$$

donde θ corresponde al ángulo entre los vectores.

Observaciones: El producto punto es un escalar. Además es **conmutativo** y **distributivo**. El producto punto entre un vector unitario por si mismo es 1, para coordenadas cartesianas: $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$.

5) *Producto cruz:* El producto cruz entre dos vectores se define de la siguiente forma

$$\vec{A} \times \vec{B} \equiv |A|\,|B| \sin\theta\ \hat{n}$$

donde θ corresponde al ángulo entre los vectores y $\hat{n}$ a la normal unitaria al plano de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Dado que existen dos sentidos posibles para la normal unitaria, la ambigüedad se resuelve con la regla de la mano derecha, para emplearla coloca tus dedos en la dirección y sentido del primer vector, luego rotalos hacia el segundo vector, entonces el sentido de la normal queda definido por el sentido de tu pulgar.

Observaciones: El producto cruz es **distributivo** y **anti-conmutativo**, es decir, $(\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{B} \times \vec{A})$. El producto cruz de dos vectores en la misma dirección es 0. En el sistema cartesiano $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$ y $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$.

6) *Productos triples:* Algunas propiedades importantes respecto al producto escalar y vectorial (cruz) de tres vectores son:
   - *Producto escalar triple:*

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

   - *Producto cruz triple:*

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = -\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) + \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C})$$

III. Sistema coordenados

Los tres sistemas de coordenadas utilizados frecuentemente son el **cartesiano**, **cilíndrico** y **esférico**, donde los últimos dos corresponden a transformaciones del sistema cartesiano que permiten simplificar cálculos y lograr mejores parametrizaciones según el problema al que se enfrente. Se recomienda analizar con detalle la construcción de estos sistemas puesto que no se abarca en este documento y así se puede lograr un mejor entendimiento de estos. Dentro de estos sistemas es posible definir ciertos elementos vectoriales poderosamente útiles como lo son los desplazamientos diferenciales, elementos de superficie y volumen, entre otros. A continuación, se presenta lo más importante acerca de ellos.

A. Sistema cartesiano

Un punto en el espacio se puede parametrizar con el vector $\vec{r}$ usando la base ortogonal ($\hat{x}$,$\hat{y}$,$\hat{z}$), es decir,

$$\vec{r} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$$

donde a_x, a_y y a_z corresponden a las componentes del vector $\vec{r}$.

Un **desplazamiento infinitesimal** utilizando el sistema cartesiano tiene la siguiente forma,

$$\vec{dl} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

Un **elemento de superficie**,

$$\vec{dS} = dydz\hat{x} + dxdz\hat{y} + dxdy\hat{z}$$

Un **elemento de volumen**,

$$dV = dxdydz$$

Observación: Notar que tanto el desplazamiento como el elemento de superficie son vectores mientras que el elemento de volumen es un escalar.

B. Sistema cilíndrico

Dado un punto P cualquiera en el sistema cartesiano, se dibuja un cilindro centrado en el origen de tal forma que intersecte el punto P. De esta forma, se puede definir el punto P en un nuevo sistema, que llamaremos cilíndrico, cuya base son los vectores unitarios $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$. La representación vectorial general de un punto en este sistema está dado por:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

Donde la transformación de cilíndricas a cartesianas corresponde a,

$$x = \rho\cos\phi$$

$$y = \rho\sin\phi$$

$$z = z$$

En sentido inverso, es decir, de cartesianas a cilíndricas,

$$\rho = x^2 + y^2$$

$$\phi = \arctan\frac{y}{x}$$

$$z = z$$

Donde ρ corresponde a la distancia del centro al punto en cuestión, ϕ corresponde al ángulo entre el vector parametrizado y el eje x, mientras que z es nada más que la misma altura cartesiana. Además las bases ortogonales se relacionan de la siguiente forma,

$$\hat{\rho} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi$$

$$\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi$$

$$\hat{z} = \hat{z}$$

Un **desplazamiento infinitesimal** utilizando el sistema cilíndrico tiene la siguiente forma,

$$\vec{dl} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\theta\hat{\phi} + dz\hat{z}$$

Un **elemento de superficie**,

$$\vec{dS} = \rho d\phi dz\hat{\rho} + d\rho\hat{\phi} + \rho d\rho dz\hat{z}$$

Un **elemento de volumen**,

$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

Observaciones: Notar que el eje z del sistema cilíndrico coincide con el eje z del sistema cartesiano. El caso particular de un sistema donde $z = 0$ se dice sistema **polar**.

C. Sistema esférico

Un punto P cualquiera en el sistema cartesiano se puede parametrizar mediante coordenadas representadas según la esfera que intersecta este punto. Así se puede definir una base ortogonal $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ en función de la base cartesiana obtienendo así el sistema esférico. La representación vectorial general resulta ser bastante sencilla e igual a,

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

Donde las transformaciones del sistema esférico a cartesiano corresponden a:

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

Donde r corresponde a la magnitud del vector parametrizado, θ al ángulo entre el vector y el eje z, mientras que ϕ es el ángulo entre la proyección del vector en el plano xy y el eje x. Además, las bases ortogonales se relacionan de la siguiente forma,

$$\hat{r} = (\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi)\sin\theta + \hat{z}\cos\theta$$

$$\hat{\theta} = (\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi)\cos\theta - \hat{z}\sin\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi$$

Un **desplazamiento infinitesimal** utilizando el sistema esférico tiene la siguiente forma,

$$\vec{dl} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi}$$

Un **elemento de superficie**,

$$\vec{dS} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{r} + r\sin\theta dr d\phi\hat{\theta} + rdrd\theta\hat{\phi}$$

Un **elemento de volumen**,

$$dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$

Observaciones: Notar que el vector unitario $\hat{\phi}$ es el sistema esférico es equivalente al vector $\hat{\phi}$ del sistema cilíndrico.

IV. Cálculo Diferencial

La siguiente sección presenta de manera bastante general algunos operadores diferenciales de especial interés y sus interpretaciones.

A. Gradiente

El **gradiente** o también conocido como **vector gradiente**, denotado por ∇f, **de un campo escalar** f, es un **campo vectorial**. Particularmente en electrostática se presenta como

$$\vec{E} = -\nabla V$$

donde $\vec{E}$ corresponde al campo eléctrico y V al potencial electrostático. Su representación matemática general en los diferentes sistemas coordenados es la siguiente. Sea f un campo escalar, entonces:

- En coordenadas **cartesianas**:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

- En coordenadas **cilíndricas**:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

- En coordenadas **esféricas**:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

Interpretación: Geométricamente ∇f en un punto arbitrario representa la dirección de máximo incremento de la función. En particular, $|\nabla f|$ corresponde a la magnitud del incremento. Nótese que si $\nabla f(\bar{x}) = 0$ entonces estamos en un punto donde no existe variación si nos movemos infinitesimalmente en cualquier dirección, se dice entonces que $\bar{x}$ es un punto estacionario. Usando esta noción y considerando f diferenciable entonces se pueden encontrar los puntos críticos de la función igualando el gradiente a 0.

B. Divergencia

La divergencia **de un campo vectorial** $\vec{F}$ es un **campo escalar** y se denota por $\nabla\cdot\vec{F}$. Su representación en los diferentes sistemas son:

- En coordenadas **cartesianas**:

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

donde F_x, F_y y F_z corresponden a las componentes en x, y y z de $\vec{F}$, respectivamente.

- En coordenadas **cilíndricas**:

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

donde F_ρ, F_ϕ y F_z corresponden a las componentes en ρ, ϕ y z de $\vec{F}$v, respectivamente.

- En coordenadas **esféricas**:

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta F_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

donde F_r, F_θ y F_ϕ corresponden a las componentes en r, θ y ϕ de $\vec{F}$, respectivamente.

Interpretación: Geométricamente $\nabla\cdot\vec{F}$ es una medida de cuánto un campo vectorial diverge de un punto. Dicho de otra manera indica el flujo, es decir, cuanto campo vectorial sale menos cuanto entra en un punto, así, cuando la divergencia es positiva se dirá que netamente los vectores "**salen**" de ese punto y si es negativa entonces "**entran**". En analogía con las leyes de Maxwell si $\nabla\cdot\vec{D} = \rho(\vec{r}) \neq 0$ entonces hay puntos en el espacio donde existen "fuentes", que dado el ejemplo, corresponden a las densidades de carga libre, se puede concluir entonces que las cargas son la "fuente" del campo eléctrico.

C. Rotor

El rotor **de un campo vectorial** $\vec{F}$ es un **campo escalar** y se denota por $\nabla\times\vec{F}$. Su representación en los diferentes sistemas son:

- En coordenadas **cartesianas:**

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde F_x, F_y y F_z corresponden a las componentes en x, y y z de $\vec{F}$, respectivamente.

- En coordenadas **cilíndricas:**

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

donde F_ρ, F_ϕ y F_z corresponden a las componentes en ρ, ϕ y z de $\vec{F}$, respectivamente.

- En coordenadas **esféricas:**

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\phi \end{vmatrix}$$

donde F_r, F_θ y F_ϕ corresponden a las componentes en r, θ y ϕ de $\vec{F}$, respectivamente.

Interpretación: Geométricamente el rotor de un campo vectorial en un punto indica cuánto rotan los vectores alrededor de ese punto. Imagine que está alimentando patos en un lago y vierte sobre él migajas de pan, si las migajas rotan una vez que hacen contacto con el agua entonces se puede decir que en el punto donde las dejó existe rotor **no nulo**.

D. Laplaciano

El laplaciano de un **campo vectorial** es un **campo vectorial** mientras que el laplaciano de un **campo escalar** es también un **campo escalar**. Si f es un campo escalar y $\vec{F}$ un campo vectorial entonces el laplaciano se denota por,

$$\Delta f = (\nabla\cdot\nabla)f = \nabla^2 f$$

$$\Delta\vec{F} = \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{F}) = (\nabla\cdot\nabla)\vec{F} = \nabla^2\vec{F}$$

Su representación matemática para el caso escalar en los diferentes sistemas son los siguientes:

- En coordenadas **cartesianas**:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- En coordenadas **cilíndricas**:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- En coordenadas **esféricas**:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

Observaciones: Para el caso en el que se quiere calcular el Laplaciano de un vector, simplemente se aplica el laplaciano a cada una de sus componentes.

V. Cálculo Integral

En la siguiente sección se presentan diferentes tipos de integrales y teoremas útiles para el estudio del Electromagnetismo.

A. Integral de línea

La integral de línea de un vector $\vec{F}$ entre los puntos A y B se denota de la siguiente forma,

$$\int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

donde $\vec{dl}$ denota el diferencial de línea que parametriza el camino Γ entre A y B. Ciertamente existen infinitos caminos posibles entre A y B, cuando el valor de la integral es **independiente** del camino que se tome se dice que el $\vec{F}$ es **conservativo**. Además, si toma un camino tal que A = B se habla de una integral sobre un camino cerrado o integral cerrada.

Observaciones: Una integral cerrada de un campo conservativo es igual a 0. Usualmente en física se toman caminos simples como líneas o circunferencias, puesto que parametrizarlos es mucho más sencillo.

Interpretación: Una integral de línea representa la suma infinita de contribuciones infinitesimales a lo largo de un camino definido. Imagine que alimenta un pato con migas de pan, cada miga de pan es una pequeña contribución a la integral, mientras que el resultado de la integral de línea sería la suma de todas las migajas de pan que comió el pato en el camino de migas que le dejó.

B. Integral de superficie

La integral de superficie, también llamada flujo, de un vector $\vec{F}$ sobre una superficie S se denota por

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

donde $d\vec{S}$ corresponde al elemento diferencial de superficie normal a la superficie, cabe mencionar que este diferencial se puede expresar como $dS\hat{n}$, es decir, una magnitud escalar dS que depende de la superficie y el sistema coordenado en cuestión y un vector normal $\hat{n}$ a la superficie. Usualmente el valor no depende de la superficie tomada pero cuando es independiente se puede determinar la integral únicamente por la integral de línea en el borde de la superficie. En caso de que la superficie sea cerrada se habla de integral cerrada y se simboliza colocando un círculo al medio de la integral de la siguiente forma.

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Observaciones: La normal del diferencial de superficie tiene dos sentidos posibles, generando cierta ambigüedad. Por tradición se dice positiva la normal que "sale" de la superficie. Note que el producto punto permite tomar en cuenta el sentido del campo vectorial en la superficie tomada, es decir, si el vector es perpendicular a la superficie el flujo será máximo y si es paralelo será nulo.

Interpretación: La integral de superficie da una medida del flujo a través de una superficie, es decir, cuantos vectores salen menos cuantos entran tomando en consideración la intensidad con la que lo hacen. Imagine que usted es la sección transversal de un túnel, a través de usted entrarán y saldrán cierta cantidad de auto todo el tiempo, la diferencia neta de los que salen menos lo que entran correspondería a la integral de superficie o flujo.

C. Integral de volumen

La integral de volumen de un **campo escalar** f se denota de la siguiente forma,

$$\int_V f dV$$

donde dV corresponde al diferencial de volumen.

Interpretación: Imagine un cubo formado por distintos tipos de arena y usted desea calcular el peso de todo el cubo conociendo la densidad de masa volumétrica en cada punto del cubo, que será representada por f (note que se trata de un campo escalar). Por lo tanto, para obtener la masa del cubo calcula la integral de volumen de la densidad sobre el volumen ocupado por este. Conceptualmente, el integrando (fdV) indicaría el peso de cada granito de arena en un punto arbitrario del cubo.

D. Teorema fundamental de la divergencia

El teorema fundamental de la divergencia, o también llamado teorema de **Gauss** o teorema de **Green** dicta que,

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

donde S **corresponde a la superficie que encierra el volumen** V.

Interpretación: Imagine el campo vectorial de la velocidad de un conjunto de partículas de agua del río calle calle, el flujo a través de la superficie que encierra este conjunto indicaría la diferencia de partículas de agua que salen y entran a través de la superficie. Ahora, la divergencia mide "cuánto" las partículas salen de un punto. Entonces, si se suma las contribuciones de la divergencia (integral de volumen) en todo el conjunto de partículas notará que lo que sale en un punto entra en el punto vecino, cancelándose las contribuciones interiores y quedando únicamente el "flujo" en los bordes (integral de superficie).

E. Teorema fundamental del rotor

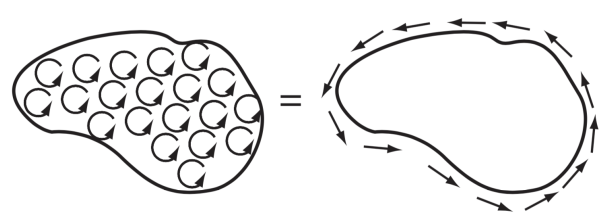
El teorema fundamental del rotor, igualmente llamado teorema de **Stokes** dicta que

$$\int_S (\nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}) = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

donde Γ **corresponde al camino que encierra la superficie** S.

Observaciones: Existe cierta ambigüedad acerca del sentido en el que se realiza la integral de línea. Para eliminarla, el sentido escogido debe ser tal que al utilizar la regla de la mano derecha sobre dos puntos consecutivos del camino se debe obtener un vector perpendicular a la superficie tal que apunte en la mismo sentido que el apuntado por el diferencial de superficie.

Interpretación: Imagine el café que revuelve tras echarle azúcar o endulzante, según su preferencia. Notará que si agrega un grano adicional de azúcar este rotará, por lo tanto se dice que el rotor en ese punto es distinto de 0. Sin embargo, en los puntos vecinos también existirá una rotación idéntica, por lo que si suma (integral de superficie) sobre la superficie del café cada una de las contribuciones del rotor todas las contribuciones se cancelarán excepto las del borde, por lo que es equivalente a realizar una suma solo sobre el borde de la superficie de su café (integral de línea). Tal como se muestra en la siguiente figura.



F. Teorema de Helmholtz

El teorema de Helmholtz entrega una base matemática sólida para afirmar el grado de conocimiento de campos vectoriales. En concreto, si se conocen condiciones de borde acerca de un campo vectorial $\vec{F}$ y además, se sabe su divergencia y rotor, entonces el campo vectorial $\vec{F}$ está totalmente determinado. Este resultado es absolutamente útil para las ecuaciones de Maxwell que entregan exactamente el rotor y divergencia del campo eléctrico y magnético en el espacio, entonces, conociendo ciertas condiciones de borde de ellos, se les puede definir completamente.

VI. Algunas propiedades

Sea un campo vectorial $\vec{F}$ **irrotacional**, se tendrá entonces que:

- $\nabla \times \vec{F} = 0$ en todas partes.
- $\int_a^b \vec{F} \cdot \vec{dl}$ es independiente del camino tomado para ir desde a hasta b.
- $\oint \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0$ para cualquier camino cerrado.
- $\vec{F}$ es el gradiente de alguna función escalar V (e.g., $\vec{F} = -\nabla V$) puesto que el rotor de un gradiente es 0. Esta función escalar no es única puesto que al agregar una constante o un termino tal que su rotor sea 0 el vector $\vec{F}$ seguirá siendo irrotacional.

Sea un campo vectorial $\vec{F}$ **no divergente** o **solenoidal**, se tendrá entonces que:

- $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ en todas partes.
- $\int \vec{F} \cdot \vec{dS}$ es independiente de la superficie tomada para cualquier línea de borde.
- $\oint \vec{F} \cdot \vec{dS} = 0$ para cualquier superficie cerrada.
- $\vec{F}$ es el rotor de algún campo vectorial (e.g., $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$) puesto que la divergencia del rotor es 0. El campo vectorial $\vec{A}$ no es único puesto que si se agrega el gradiente de un escalar V el rotor del gradiente seguirá siendo 0.

Sea f, g campos escalares, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ campos vectoriales, se definen entonces las siguientes propiedades:

1) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
2) $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$
3) $\nabla \cdot (f\vec{A}) = f(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\nabla f)$
4) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times A) - \vec{A} \cdot \vec{(}\nabla \times \vec{B})$
5) $\nabla \times (f\vec{A}) = f(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\nabla f)$
6) $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - B(\nabla \cdot \vec{A})$

Otras propiedades importantes son:

7) $\nabla \cdot (\nabla\vec{A}) = \nabla^2\vec{A}$
8) $\nabla \times (\nabla\vec{A}) = 0$
9) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$
10) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

References

[1] Clayton R. Paul, Keith W. Whites, Syed A. Nasa, Introduction to Electromagnetic Fields, 2nd ed., McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering Electromagnetics, 1997.

[2] Griffiths, D. J. (1999). Introduction to Electrodynamics Prentice-Hall. Upper Saddle River, NJ.

[3] Cordero, P. (2017). Electromagnetismo. Editorial Universitaria de Chile.