P1 (Refinamiento Iterativo) ①

Considere el problema de resolver el sistema lineal

$$Ax = b$$

en que $A \in S^n_+$

a) pruebe que este problema es equivalente a

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}$$

sol: si $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$, entonces, ya que $A \in S^n_+$, f convexa. Por lo tanto, el mínimo queda dado por la condición de optimalidad de primer orden

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$
$$\Leftrightarrow A\bar{x} - b = 0 \Leftrightarrow A\bar{x} = b \square.$$

b) En casos en los que la inversa de A no exista o sea inestable de calcular, nos interesa explorar métodos iterativos para encontrar una solución $\bar{x}$. Como vimos en clases,

$$\text{prox}_{\lambda f}(v) = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{argmin}} \left\{ f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - v\|^2 \right\}$$

sabemos que este operador está bien definido, es no expansivo y se puede probar que para $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la iteración

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda f}(x_k)$$

converge a $\bar{x}$ tal que $\bar{x} = \text{prox}_{\lambda f}(\bar{x})$. Esto implica (propuesto) que $\bar{x}$ minimizador de f. Con esto en mente, describa un proceso para estimar la solución de $Ax = b$.

Sol: El operador proximal asociado a f es dado por

$$\operatorname{Prox}_{\lambda f}(x_k) = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2}x^TAx - \langle b, x\rangle + \frac{1}{2\lambda}\|x - x_k\|^2 \right\}$$

ya que la función es convexa, obtenemos que

$$A x_{k+1} - b + \frac{1}{\lambda}(x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$\iff \left(A + \frac{1}{\lambda}I\right)x_{k+1} = b + \frac{1}{\lambda}x_k$$

Note ahora que como $A \in S^n_+$:

$$x^T\left(A + \frac{1}{\lambda}I\right)x = x^TAx + \frac{1}{\lambda}\|x\|^2 > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

De modo que $A + \frac{1}{\lambda}I \in S^n_{++}$ y por lo tanto es invertible! Así, obtenemos la iteración

$$x_{k+1} = \left(A + \frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\left(b + \frac{1}{\lambda}x_k\right)$$

la cual por propiedades del operador proximal converge a la solución. $\square$.

P2 (Dualidad en proyección a un poliedro) ③

Sea $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ Cx \leq d\}$ un poliedro con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $d \in \mathbb{R}^p$.

el problema de encontrar la proyección de v sobre $\mathcal{E}$ puede ser visto como

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x - v\|^2$$
$$Ax = b$$
$$Cx \leq d$$

a) Escriba el Lagrangeano asociado a este problema y obtenga el $x^* \in \mathbb{R}^n$ que minimiza la función $x \mapsto L(x,\nu,\eta)$ dados $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\eta \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$.

Sol: $L(x,\nu,\eta) = \frac{1}{2}\|x - v\|^2 + \langle \nu, Ax - b\rangle + \langle \eta, Cx - d\rangle$

$= \frac{1}{2}\|x - v\|^2 + \langle A^T\nu, x\rangle - \langle \nu, b\rangle + \langle C^T\eta, x\rangle - \langle \eta, d\rangle$

$= \frac{1}{2}\|x - v\|^2 + \langle A^T\nu + C^T\eta, x\rangle - \langle \nu, b\rangle - \langle \eta, d\rangle$

condición de primer orden:

$$(x^* - v) + A^T\nu + C^T\eta = 0$$
$$\Rightarrow x^* = v - A^T\nu - C^T\eta$$

Rmk: Dada una solución del problema dual, esto nos permite obtener la solución x^* del problema de proyección.

b) obtenga la función lagrangeana a minimizar y concluya el problema dual:

Sol: La función Lagrangeana es

④

$$g(\nu,\eta) = L(x^*,\nu,\eta) = \frac{1}{2}\|A^T\nu + C^T\eta\|^2$$

$$-\|A^T\nu + C^T\eta\|^2 + \langle A^T\nu + C^T\eta, \nu\rangle - \langle \nu, b\rangle - \langle \eta, d\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}\|A^T\nu + C^T\eta\|^2 + \langle A\nu, \nu\rangle + \langle C\nu, \eta\rangle + \langle b, \nu\rangle$$
$$- \langle d, \eta\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}\left\|\begin{bmatrix} A \\ C\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\nu \\ \eta\end{bmatrix}\right\|^2 + \langle A\nu - b, \nu\rangle + \langle C\nu - d, \eta\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}\left\|\begin{bmatrix} A \\ C\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\nu \\ \eta\end{bmatrix}\right\|^2 + \left(\begin{bmatrix} A \\ C\end{bmatrix}\nu - \begin{bmatrix} b \\ d\end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix}\nu \\ \eta\end{bmatrix}$$

De modo que el problema dual es

$$-\max_{\substack{\nu\in\mathbb{R}^m \\ \eta\in\mathbb{R}^p_{\geq 0}}} \left\{ -\frac{1}{2}\left\|\begin{bmatrix} A \\ C\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\nu \\ \eta\end{bmatrix}\right\|^2 + \left(\begin{bmatrix} A \\ C\end{bmatrix}\nu - \begin{bmatrix} b \\ d\end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix}\nu \\ \eta\end{bmatrix} \right\}$$

$\square$.