MA5801 Análisis Convexo y Dualidad
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Auxiliar 12

Preparación Examen
5 de diciembre de 2024

P1. (Refinamiento Iterativo) Considere el problema de resolver el sistema lineal

$$Ax = b$$

En que $A \in \mathcal{S}^n_+$.

a) Pruebe que este problema es equivalente a

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}$$

b) En casos en los que la inversa de A no exista o sea numéricamente inestable de calcular directamente, nos interesa explorar métodos iterativos para encontrar una solución $\overline{x}$. Como vimos en clases, sea

$$\mathbf{prox}_{\lambda f}(v) = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - v\|^2 \right\}$$

Sabemos que este operadoe está bien definido, es no expansivo y se puede probar que para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la iteración siguiente

$$x_{k+1} = \mathbf{prox}_{\lambda f}(x_k)$$

Converge a $\overline{x}$ tal que $\overline{x} = \mathbf{prox}_{\lambda f}(\overline{x})$. Esto implica que $\overline{x}$ minimizador de f. Con esto en mente, describa un proceso para estimar la solución de $Ax = b$.

P2. (Dualidad en proyección a un poliedro) Sea

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, Cx \leq d\}$$

Un poliedro con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, d \in \mathbb{R}^p$. El problema de encontrar la proyección de $v \in \mathbb{R}^n$ sobre $\mathcal{C}$ puede ser visto como

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|x - v\|^2 \\ Ax = b \\ Cx \leq d \end{aligned}$$

a) Escriba el lagrangeano asociado a este problema y obtenga el $x^* \in \mathbb{R}^n$ que minimiza la función $x \mapsto L(x, \nu, \eta)$ dados $\nu \in \mathbb{R}^m, \eta \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$.

b) Obtenga la función lagrangeana a minimizar y concluya el problema dual asociado.