MA5801 Análisis Convexo y Dualidad
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Control 2

Duración: 3 : 00 hrs
16 de noviembre de 2024

P1. Sea H espacio de Hilbert y $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ función convexa, sci y propia. Para $\lambda > 0$, definimos la *regularizada de Moreau-Yosida* de parámetro λ de f como $f_\lambda : H \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_\lambda(z) = \inf_{x \in H} \left\{ f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2 \right\}$$

a) (1 pto) Pruebe que f_λ es convexa, finita y que el ínfimo se obtiene en un único punto.
Indicación: No demuestre la existencia del minimizador. Para demostrar la unicidad, utilice sin demostración que $x \mapsto \frac{1}{2\lambda}\|x - z\|^2$ es estríctamente convexa.

b) (1.5 pts) Deduzca que para $z \in H$, existe un único $\overline{x} \in H$ tal que $z \in \overline{x} + \lambda \partial f(\overline{x})$.

c) (1 pto) Pruebe que ∂f es monótono: $x^* \in \partial f(x), y^* \in \partial f(y) \implies \langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq 0$.

d) (1.5 pts) Lo probado en b) permite definir el operador resolvente $J_\lambda : H \to H$ por $J_\lambda = (I + \lambda \partial f)^{-1}$. Deduzca que este operador es no expansivo: $\|J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2)\| \leq \|z_1 - z_2\|$.

e) (1 pto) Concluya que f_λ es Frechet diferenciable y encuentre su diferencial.

P2. Sean X, Y espacios de Banach, $A : X \to Y$ lineal continua y $f_0 : Y \to \mathbb{R}$. Considere un problema irrestricto como el siguiente:

$$\min_{x \in X} f_0(Ax + b)$$

Note que, al no haber restricciones, el dual de este problema no posee variables y maximiza sobre una función constante. Por lo que su análisis no es muy útil. Consideraremos entonces la siguiente reformulación:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X, y \in Y} \; & f_0(y) \\ & Ax + b = y \end{aligned} \tag{P}$$

a) (1.5 pts) Siendo $\nu \in Y^*$ la variable dual asociada a la nueva restricción de igualdad, escriba el problema dual de (P) en términos de la conjugada de Fenchel de f_0.

b) (1 pto) Sea ahora $\|\cdot\|$ la norma sobre Y y $\|\cdot\|_*$ la norma sobre el espacio dual Y^*. Consideramos ahora el problema de aproximar $b \in Y$ por un elemento en la imagen del operador A. Es decir:

$$\min_{x \in X} \|Ax - b\| \tag{$P_{\|\cdot\|}$}$$

Concluya, usando la misma reformulación, que un problema dual a este viene dado por

$$\begin{aligned} -\max_{\nu \in Y^*} \; & \langle \nu, b \rangle \\ & \|\nu\|_* \leq 1 \\ & A^* \nu = 0 \end{aligned} \tag{$D_{\|\cdot\|}$}$$

En adelante, sea $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango n de modo que $A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible. Consideremos el *problema de Chebyshev* siguiente:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_\infty \tag{P_∞}$$

Este problema no tiene solución explícita, pero el problema de mínimos cuadrados dado por

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 \tag{P_2}$$

Sí tiene la (única) solución explícita x_{ls} dada por $x_{\text{ls}} = (A^T A)^{-1} A^T b$ (no lo demuestre). Nos interesa obtener cotas para el valor de (P_∞) a partir de la información de (P_2). Para ello, sea x_{ch} una solución de (P_∞) y proceda como sigue:

c) (1 pto) Pruebe que
$$\|Ax_{\text{ls}} - b\|_\infty \leq \sqrt{m}\|Ax_{\text{ch}} - b\|_\infty$$
Utilizando la equivalencia de normas siguiente:
$$\forall z \in \mathbb{R}^m : \frac{1}{\sqrt{m}}\|z\|_2 \leq \|z\|_\infty \leq \|z\|_2$$

d) (1.5 pts) Sea $r_{\text{ls}} = b - Ax_{\text{ls}}$ el residuo del problema de mínimos cuadrados (P_2) y, asumiendo que $r_{\text{ls}} \neq 0$, defina además
$$\nu_1 = -\frac{r_{\text{ls}}}{\|r_{\text{ls}}\|_1}, \qquad \nu_2 = \frac{r_{\text{ls}}}{\|r_{\text{ls}}\|_1}$$
Pruebe que ν_1, ν_2 son factibles para el problema dual correspondiente a (P_∞). Cada uno de estos entrega una cota inferior para el valor de (P_∞). Tomando la mejor de estas, pruebe que
$$\|Ax_{\text{ch}} - b\|_\infty \geq \frac{\|r_{\text{ls}}\|_2^2}{\|r_{\text{ls}}\|_1}$$

e) (1 pto) Compare esta cota con la obtenida en la parte c).