

P1 (Regularizada de Moreau - Yosida)

(1)

Sea H espacio de Hilbert y $f: H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ función convexa del tipo propia. Definimos $f_\lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$ para $\lambda > 0$ por

$$f_\lambda(z) = \inf_{x \in H} \left\{ f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2 \right\}$$

a) pruebe que f_λ es convexa, finita y que el ínfimo se obtiene en un único punto.

Indicación: No demuestre la existencia del minimizador, sólo la unicidad. Utilice sin demostración que $x \mapsto \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2$ es estrictamente convexa.

Dem: observamos que $f_\lambda(z) = (f \square \frac{1}{2\lambda} \|\cdot\|^2)(z)$.

Por lo que la convexidad se extrae de lo probado en el a. x. anterior #4. Para ver la finitud, vemos que, al ser f propia, existe $x_0 \in H$ con $f(x_0) < \infty$

$$\Rightarrow f_\lambda(z) \leq f(x_0) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x_0\|^2 < \infty.$$

Ahora, probamos la unicidad del minimizador. Supongamos

$x_1 \neq x_2$ minimizadores correspondientes a $f_\lambda(z)$.

Por convexidad estricta, tenemos que para $\alpha \in (0, 1)$,

$$\frac{1}{2\lambda} \|z - (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)\|^2 < \frac{\alpha}{2\lambda} \|z - x_1\|^2 + \frac{(1-\alpha)}{2\lambda} \|z - x_2\|^2$$

también, al ser f convexa,

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Sumando, se obtiene que:

$$f(2x_1 + (1-\alpha)x_2) + \frac{1}{2\lambda} \|z - (2x_1 + (1-\alpha)x_2)\|^2$$

②

$$< \alpha \left(f(x_1) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x_1\|^2 \right)$$

$$+ (1-\alpha) \left(f(x_2) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x_2\|^2 \right)$$

Como x_1, x_2 minimizadores, obtenemos

$$f(2x_1 + (1-\alpha)x_2) + \frac{1}{2\lambda} \|z - (2x_1 + (1-\alpha)x_2)\|^2$$

$$< \alpha f_\lambda(z) + (1-\alpha)f_\lambda(z) = f_\lambda(z)$$

cosa que contradice la definición de $f_\lambda(z)$ como ínfimo $\square$.

b) Deduzca que para $z \in H$, existe un único $\bar{x} \in H$ tal que $z \in \bar{x} + \lambda \partial f(\bar{x})$. (Por la derivada de Frechet)

Dem: sea $\bar{x}$ el único punto que obtiene el ínfimo $f_\lambda(z)$.

por la regla de Fermat,

$$0 \in \partial \left(f + \frac{1}{2\lambda} \|x - z\|^2 \right) (\bar{x})$$

ya que f propia, existe un punto en que es finita.

Ya que $\frac{1}{2\lambda} \|x - z\|^2$ es continua en H , se cumplen las condiciones para el teo. de Moreau-Rockafellar. de modo que

$$\partial \left(f + \frac{1}{2\lambda} \|x - z\|^2 \right) (\bar{x})$$

$$= \partial f(\bar{x}) + \frac{1}{2\lambda} \partial (\|\cdot - z\|^2) (\bar{x})$$

$$\stackrel{(\text{Frechet})}{=} \partial f(\bar{x}) + \frac{1}{\lambda} (\bar{x} - z)$$

$$\text{de ese modo, } 0 \in \lambda \partial f(\bar{x}) + \bar{x} - z$$

$$\Rightarrow z \in \bar{x} + \lambda \partial f(\bar{x}) \quad \square$$

c) Pruebe que ∂f es monótono.

(3)

$$x^* \in \partial f(x), y^* \in \partial f(y) \Rightarrow \langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq 0.$$

Dem: Sean

$$\begin{cases} x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle \\ y^* \in \partial f(y) \Leftrightarrow f(y) + f^*(y^*) = \langle y^*, y \rangle \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle y^* - x^*, y - x \rangle &= \langle y^*, y \rangle - \langle x^*, x \rangle \\ &= f(y) + f^*(y^*) - f(x) - f^*(x^*) \\ &= (f(y) + f^*(x^*) - \langle x^*, y \rangle) + (f(x) + f^*(y^*) - \langle y^*, x \rangle) \\ &\geq 0 \quad (\text{por desigualdad de Young - Fenchel}) \end{aligned}$$

d) Deduzca que J_λ es ~~contracción~~ ^{no expansivo}:

$$\|J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2)\| \leq \|z_1 - z_2\|$$

Dem: $J_\lambda(z)$ viene definido tal que

$$\begin{aligned} z &\in J_\lambda(z) + \lambda \partial f(J_\lambda(z)) \quad \text{De modo que} \\ \begin{cases} z_1 &\in J_\lambda(z_1) + \lambda \partial f(J_\lambda(z_1)) \\ z_2 &\in J_\lambda(z_2) + \lambda \partial f(J_\lambda(z_2)) \end{cases} \\ \Rightarrow z_1 - z_2 &\in J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2) + \lambda (\partial f(J_\lambda(z_1)) - \partial f(J_\lambda(z_2))) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\lambda} [(z_1 - J_\lambda(z_1)) - (z_2 - J_\lambda(z_2))] \in \partial f(J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2)) \end{aligned}$$

Existen entonces $y_1^a \in \partial f(J_\lambda(z_1))$, $y_2^a \in \partial f(J_\lambda(z_2))$ ①
tales que

$$\frac{1}{\lambda} [(z_1 - z_2) - (J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2))] = y_1^a - y_2^a$$

Hacemos $\langle \cdot, J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2) \rangle$ a ambos lados

y aplicamos monotonía obteniendo así:

$$\frac{1}{\lambda} \langle (z_1 - z_2) - (J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2)), J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2) \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle z_1 - z_2, J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2) \rangle \geq \|J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2)\|^2$$

Por Cauchy-Schwarz entonces,

$$\|J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2)\| \leq \|z_1 - z_2\| \|J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2)\|$$

$$\Rightarrow \|J_\lambda(z_1) - J_\lambda(z_2)\| \leq \|z_1 - z_2\| \quad \square$$

f) concluya que f_λ es Frechet diferenciable

Dem: veamos que f_λ es continua. Ya que $J_\lambda(z)$ es el minimizador en $f_\lambda(z)$, tenemos que

$$f_\lambda(z) = f(J_\lambda(z)) + \frac{1}{2\lambda} \|J_\lambda(z) - z\|^2$$

de modo que como J_λ es no expansiva, se concluye la continuidad de f_λ . Además,

$$\partial f_\lambda(z) = \partial \left(f \square \frac{1}{2\lambda} \|\cdot\|^2 \right) (z)$$

$$= \partial f(J_\lambda(z)) \cap \partial \left(\frac{1}{2\lambda} \|\cdot\|^2 \right) (z - J_\lambda(z))$$

$$= \partial f(J_\lambda(z)) \cap \left\{ \frac{1}{\lambda} (z - J_\lambda(z)) \right\}$$

De modo que $\partial f_\lambda(z)$ es único. Así, por el lema del apunte, se tiene $\nabla f_\lambda(z) = \frac{1}{\lambda} (z - J_\lambda(z)) \quad \square$

P2 (Dualidad)

①

Sean X, Y Banach, $A: X \rightarrow Y$ lineal continua y $f_0: Y \rightarrow \mathbb{R}$. Considere un problema irrestricto como el siguiente:

$$\min_{x \in X} f_0(Ax + b)$$

Note sin embargo que, al no haber restricciones, el dual de este problema no parece interesante y maximiza sobre una función constante. Por lo que su análisis no es muy útil. Consideremos entonces la sgte reformulación:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X, y \in Y} \quad & f_0(y) \\ & Ax + b = y \end{aligned} \quad (P)$$

a) siendo $y \in Y$ la variable dual asociada a la nueva restricción de igualdad, escriba el problema dual de (P) en términos de la conjugada de Fenchel de f_0 .

sol: La función lagrangiana es

$$L(x, y, v) = f_0(y) + \langle v, Ax + b - y \rangle$$

Minimizando sobre x, y , obtenemos

$$\inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \{ f_0(y) + \langle v, Ax + b - y \rangle \} \quad (2)$$

$$= \inf_{y \in Y} \{ f_0(y) + \langle v, b - y \rangle + \underbrace{\inf_{x \in X} \langle A^*v, x \rangle}_{(-\infty \text{ salvo que } A^*v = 0)} \}$$

$$= -\delta_{\{0\}}(A^*v) - \sup_{y \in Y} \{ \langle v, y - b \rangle - f_0(y) \}$$

$$= -\delta_{\{0\}}(A^*v) + \langle v, b \rangle - \sup_{y \in Y} \{ \langle v, y \rangle - f_0(y) \}$$

$$= -\delta_{\{0\}}(A^*v) + \langle v, b \rangle - f_0^*(v)$$

el dual es entonces

$$= \max_{v \in Y^*} \{ \langle v, b \rangle - f_0^*(v) - \delta_{\{0\}}(A^*v) \}$$

$$= \max_{\substack{v \in Y^* \\ \text{s.t.} \\ A^*v = 0.}} \{ \langle v, b \rangle - f_0^*(v) \}$$

b) ~~sea~~ ahora $\|\cdot\|$ la norma sobre Y y $\|\cdot\|_*$ la norma sobre el espacio dual Y^* . ~~Entonces~~ ~~que~~ consideramos ahora el problema de aproximar $b \in Y$ por el rango del operador A . Es decir,

$$\min_{x \in X} \|Ax - b\|$$

(P11.1) ③

concluyen de lo anterior que un problema dual a este, bajo la misma reformulación, viene dado por

$$\begin{aligned} & - \max_{v \in Y^*} \langle v, b \rangle \\ & \text{s.t.} \quad \|v\|_d \leq 1 \end{aligned}$$

$$A^* v = 0.$$

Sol: (P11.1) corresponde al caso anterior para $f_0(y) = \|y\|$. Además, sabemos que para esta f_0 se tiene que $f_0^*(y^*) = \delta_{B(0,1)}(y^*)$.

De modo que el dual queda

$$\begin{aligned} & - \max_{v \in Y^*} \{ \langle v, b \rangle - f_0^*(v) \} \\ & A^* v = 0 \end{aligned}$$

$$= - \max_{v \in Y^*} \{ \langle v, b \rangle - \delta_{B(0,1)}(v) \} \\ A^* v = 0$$

que es lo pedido.

En adelante, sea $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$,
 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (de rango n) y consideramos el problema de Chebyshev
 siguiente

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_{\infty} \quad (P_{\infty})$$

este problema no tiene solución explícita y puede ser complicado resolver, pero el problema de mínimos cuadrados

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 \quad (P_2)$$

si tiene la (única) solución explícita x_{ls} dada por $x_{ls} = (A^T A)^{-1} A^T b$ (no lo demuestro). Nos interesa obtener cotas para el valor de (P_{∞}) a partir de la información de (P_2) . Para ello, sea x_{ch} solución de (P_{∞}) .
 c) pruebe que

$$\|Ax_{ls} - b\|_{\infty} \leq \sqrt{m} \|Ax_{ch} - b\|_{\infty}$$

utilizando la equivalencia de normas siguiente

$$\forall z \in \mathbb{R}^m: \frac{1}{\sqrt{m}} \|z\|_2 \leq \|z\|_{\infty} \leq \|z\|_2.$$

Dem. tenemos que

$$\begin{aligned} \|Ax_{ch} - b\|_{\infty} &\geq \frac{1}{\sqrt{m}} \|Ax_{ch} - b\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{m}} \|Ax_{ls} - b\|_2 \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{m}} \|Ax_{ls} - b\|_{\infty}. \quad \square \end{aligned}$$

d) Sea $r_{is} = b - Ax_{is}$ el residuo del problema de mínimos cuadrados y asumamos que $r_{is} \neq 0$.
Definamos además

$$v_1 = -\frac{r_{is}}{\|r_{is}\|_1}, \quad v_2 = \frac{r_{is}}{\|r_{is}\|_1}$$

pruebe que v_1, v_2 son factibles para el problema dual correspondiente a (P_{∞}) . Cada uno de estos entrega una cota inferior para el valor de (P_{∞}) . Tomando la mejor de estas, pruebe que

$$\|Ax_{ch} - b\|_{\infty} \geq \frac{\|r_{is}\|_2^2}{\|r_{is}\|_1}$$

Sol: Es claro que $v_1, v_2 \in B(0,1)$ ~~están~~ en el espacio $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ dual de $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{\infty})$. Además,

$$A^T v_i = \pm \frac{1}{\|r_{is}\|_1} A^T r_{is} = \pm \frac{1}{\|r_{is}\|_1} A^T (b - Ax_{is})$$

$$= \pm \frac{1}{\|r_{is}\|_1} (A^T b - A^T A \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T b}_{x_{is}}) = 0.$$

De modo que v_i ~~son~~ ^{x_{is}} factibles en el dual de (P_{∞}) . veamos ahora que

$$\begin{aligned} \langle v_2, b \rangle &= -\frac{1}{\|r_{is}\|_1} \langle r_{is}, b \rangle = -\frac{1}{\|r_{is}\|_1} \langle r_{is}, b - Ax_{is} \rangle \\ &= -\frac{\|r_{is}\|_2^2}{\|r_{is}\|_1} \end{aligned}$$

Análogamente,

(6)

$$\langle v_2, b \rangle = \frac{\|r_2\|_2^2}{\|r_2\|_1}$$

Como v_2 obtiene un mayor valor, este entregará ~~mejor~~ mejor cota. De acuerdo a la teoría de dualidad ~~esta~~ en el curso, esto es

$$\|Ax_{ch} - b\|_{\infty} + S(D) \geq 0$$

$$\Rightarrow \|Ax_{ch} - b\|_{\infty} \geq \frac{\|r_2\|_2^2}{\|r_2\|_1} \quad \square$$

c) Compare esta cota con la obtenida en la parte c).

Sol: Para esto, recordemos las siguientes cotas.

$$\bullet) \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}$$

$$\bullet) \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2$$

de modo que

$$\frac{\|r_2\|_{\infty}}{\sqrt{n}} \leq \frac{\|r_2\|_2}{\sqrt{n}} \leq \frac{\|r_2\|_2^2}{\|r_2\|_1}$$

Entonces, la cota obtenida por dualidad es mejor que la obtenida en c) $\square$.