

## MA5801 Análisis Convexo y Dualidad

Profesor: Alejandro Jofré

Auxiliar: Benjamín Vera Vera

# Auxiliar 11

## Dualidad Lagrangeana

11 de noviembre de 2024

**P1. (Problema de máxima entropía)** En esta pregunta vamos a ilustrar cómo, en algunos casos, a partir de una solución de un problema dual se puede obtener un criterio para la existencia de soluciones del problema primal. Esto lo vamos a contextualizar en un problema de máxima entropía, en que el correspondiente problema dual tiene la estructura de un problema de *programación geométrica*. Para ello proceda como sigue:

- a) Calcule la conjugada de Fenchel de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x \ln(x) + \delta_{(0,\infty)}(x)$   
 b) Deduzca la conjugada de Fenchel de la función  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) + \delta_{\mathbb{R}_{>0}^n}(x)$$

- c) Consideremos el problema de optimización genérico siguiente:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ Ax \leq b \in \mathbb{R}^m \\ Cx = d \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

Se ha visto que si definimos  $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \langle \lambda, Ax - b \rangle + \langle \mu, Cx - d \rangle$ , entonces el problema puede escribirse como

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{\lambda \geq 0, \mu \in \mathbb{R}^p} L(x, \lambda, \mu)$$

Y su correspondiente problema dual lagrangiano viene entonces dado por

$$- \max_{\lambda \geq 0, \mu \in \mathbb{R}^p} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \mu)$$

Escriba este dual en términos de la conjugada de Fenchel de la función  $f$ .

- d) Consideremos el problema siguiente

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) + \delta_{\mathbb{R}_{>0}^n}(x) \right\} \\ Ax \leq b \\ 1^T x = 1 \end{aligned}$$

Utilizando lo visto anteriormente, escriba y simplifique el problema dual asociado lo más posible.

- e) Nótese que el problema dual obtenido es sencillo de analizar. Sea  $(\lambda^*, \mu^*)$  solución del dual. obtenga a partir de esto un criterio de factibilidad para el primal y una solución en caso de existir.

*Indicación: Suponga que se tiene la condición de calificación de Slater.*