

P2 | ^{a)} Cal de la conjugada de Fenchel de la función ①

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ por } f(x) = x \ln(x) + \delta_{(0, \infty)}(x)$$

Sol: Sea $x^* \in \mathbb{R}$, busamos maximizar la función
 $x \mapsto x^* x - x \ln(x)$ para $x > 0$. vemos que

$$(x^* x - x \ln(x))' = x^* - \ln(x) - 1 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Rightarrow \ln(x) = x^* - 1 \Rightarrow \boxed{x = e^{x^* - 1}} \quad (> 0)$$

$$\text{Además, } (x^* - \ln(x) - 1)' = -\frac{1}{x} < 0 \text{ (si } x > 0).$$

De modo que la función a maximizar es estrictamente
cóncava. Entonces $x = e^{x^* - 1}$ entrega un
máximo dado por

$$\begin{aligned} x^* x - x \ln(x) &= x (x^* - \ln(x)) = e^{x^* - 1} (x^* - (x^* - 1)) \\ &= e^{x^* - 1} \end{aligned}$$

De modo que la conjugada de Fenchel viene dada
por

$$f^*(x^*) = e^{x^* - 1}.$$

b) Deduzca la conjugada de Fenchel de la función $f_0: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por

(2)

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^m x_i \ln(x_i) + \delta_{\mathbb{R}_{>0}^m}(x)$$

Sol: vemos que para $x^* \in \mathbb{R}^m$,

$$f_0^*(x^*) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ x > 0}} \{ \langle x^*, x \rangle - f_0(x) \}$$

$$= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ x > 0}} \left\{ \sum_{i=1}^m (x_i^* x_i - x_i \ln(x_i)) \right\} \quad / \text{ las variables son independientes.}$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sup_{\substack{x_i \in \mathbb{R} \\ x_i > 0}} \{ x_i^* x_i - x_i \ln(x_i) \} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^m (x \ln(x))^*(x_i^*) = \sum_{i=1}^m e^{x_i^* - 1}$$

c) Consideremos el problema de optimización

③

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$Ax \leq b \in \mathbb{R}^m$$

$$Cx = d \in \mathbb{R}^p$$

se ha visto que este problema puede escribirse como

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \mu \in \mathbb{R}^p}} \left\{ f(x) + \langle \lambda, Ax - b \rangle + \langle \mu, Cx - d \rangle \right\}$$

$L(x, \lambda, \mu)$

y que de este modo, su dual lagrangeano viene dado por

$$- \max_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \mu \in \mathbb{R}^p}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ L(x, \lambda, \mu) \right\}$$

escriba este dual en términos de la conjugada de f .

Solo vemos que

$$\begin{aligned} & \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \langle \lambda, Ax - b \rangle + \langle \mu, Cx - d \rangle \right\} \\ &= -\langle \lambda, b \rangle - \langle \mu, d \rangle + \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \langle A^T \lambda, x \rangle + \langle C^T \mu, x \rangle \right\} \\ &= -\langle \lambda, b \rangle - \langle \mu, d \rangle - \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle -A^T \lambda - C^T \mu, x \rangle - f(x) \right\} \end{aligned}$$

$$= -\langle \lambda, b \rangle - \langle \mu, d \rangle - f^*(-A^T \lambda - C^T \mu) \quad (4)$$

De modo que el problema dual es

$$\max_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \mu \in \mathbb{R}^p}} \left\{ -\langle \lambda, b \rangle - \langle \mu, d \rangle - f^*(-A^T \lambda - C^T \mu) \right\}$$

d) considere el problema de maximización de entropía siguiente

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ \sum_{i=1}^m x_i \log(x_i) + S_{\mathbb{R}_{\geq 0}^m}(x) \right\}$$

$$Ax \leq b \quad x \in \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{1}^T x = 1$$

utilizando lo visto anteriormente, escriba y simplifique el problema dual asociado.

Sol: Ahora, $\mu \in \mathbb{R}$ y veamos que si a_i denota la i -ésima columna de A , entonces la i -ésima

componente del vector $-A^T \lambda - \mathbf{1}^T \mu \in \mathbb{R}^m$ se expresa como

$-\langle a_i, \lambda \rangle - \mu$. De modo que usando la conjugada (dada en b), tenemos que

$$\max_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \mu \in \mathbb{R}}} \left\{ -\langle \lambda, b \rangle - \mu - \sum_{i=1}^m \exp(-\langle a_i, \lambda \rangle - \mu - 1) \right\}$$

$$z = \max_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}^p}} \left\{ -\langle \lambda, b \rangle - 1 - e^{-\lambda+1} \sum_{i=1}^n e^{-\langle a_i, \lambda \rangle} \right\} \quad (5)$$

Podemos optimizar analíticamente sobre λ . Dado que la función objetivo es cóncava c/r a λ , imponemos la condición

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\langle \lambda, b \rangle - 1 - e^{-\lambda+1} \sum_{i=1}^n e^{-\langle a_i, \lambda \rangle} \right) = 0$$

$$\Rightarrow -1 + \left(\sum_{i=1}^n e^{-\langle a_i, \lambda \rangle} \right) e^{-\lambda+1} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda+1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n e^{-\langle a_i, \lambda \rangle}}$$

$$\Rightarrow -\lambda + 1 = -\ln \left(\sum_{i=1}^n e^{-\langle a_i, \lambda \rangle} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{-\langle a_i, \lambda \rangle} \right) + 1$$

El problema entonces se reduce a

$$- \max_{\lambda \geq 0} \left\{ -\langle \lambda, b \rangle - \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{-\langle a_i, \lambda \rangle} \right) + 1 \right. \\ \left. - \exp \left(\ln \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n e^{-\langle a_i, \lambda \rangle}} \right) \right) \sum_{i=1}^n e^{-\langle a_i, \lambda \rangle} \right\}$$

$$= - \max_{\lambda \geq 0} \left\{ - \langle \lambda, b \rangle - \ln \left(\sum_{i=1}^m e^{-\langle a_i, \lambda \rangle} \right) \right\} \quad (6)$$

e) Nótese que el dual obtenido es sencillo de resolver. and so on. sea (λ^*, μ^*) solución del dual. Obtengan a partir de esto un criterio de factibilidad para el primal y una solución en caso de existir.

sol: consideremos la función $x \mapsto L(x, \lambda^*, \mu^*)$.

Es decir,

$$x \mapsto \sum_{i=1}^m x_i \ln(x_i) + \langle \lambda^*, (Ax - b) \rangle + \langle \mu^*, \mathbb{1}^T x - 1 \rangle$$

Notar que esto es estrictamente convexo como función de x , de modo que hay un minimizador único x^* . Sabemos, teniendo dualidad fuerte, que si x^* solución de L primal existe, debe ser este. Este x^* es dado por la minimización restringida del Lagrangiano. vemos que

~~$$= \sum_{i=1}^m x_i \ln(x_i) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (\langle A_{i, \bullet}, x \rangle - b_i) + \mu^* \left(\sum_{i=1}^m x_i - 1 \right)$$~~

$$L(x, \lambda^*, \mu^*)$$

④

$$= \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) + \cancel{\sum_{i=1}^n} \langle A^T \lambda^*, x \rangle + \mu^* \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right) - \langle \lambda^*, b \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(x_i \ln(x_i) + \langle a_i, \lambda^* \rangle x_i + \mu^* x_i \right) - \mu^* - \langle \lambda^*, b \rangle$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(x, \lambda^*, \mu^*) = \ln(x_i) + 1 + \langle a_i, \lambda^* \rangle + \mu^* \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_i^* = \frac{1}{\exp(1 + \langle a_i, \lambda^* \rangle + \mu^*)}$$

Tenemos entonces que

→ si x^* es factible para el primal, entonces es la solución.

→ si no, entonces el primal es infactible.