

P2 (subdiferencial de funciones marginales). ①

Sea  $V \in C_0(X \times Y)$  para  $X, Y$  espacios de Banach en dualidad con  $X^*, Y^*$ . Sea

$$W(Y) = \inf_{x \in X} V(x, y)$$

Para  $\bar{y} \in Y$  y  $\bar{x} \in X$  solución del correspondiente problema de optimización, pruebe que

$$\bar{q} \in \partial W(\bar{y}) \Leftrightarrow (0, \bar{q}) \in \partial V(\bar{x}, \bar{y}).$$

Dem.: Usando definición, vemos que

$$(0, \bar{q}) \in \partial V(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\Leftrightarrow \forall x', y' : V(\bar{x}, \bar{y}) + \langle (0, \bar{q}), (x', y') - (\bar{x}, \bar{y}) \rangle \leq V(x', y')$$

$$\Leftrightarrow \forall x', y' : V(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \bar{q}, y' - \bar{y} \rangle \leq V(x', y')$$

$$\Leftrightarrow \forall x', y' : W(\bar{y}) + \langle \bar{q}, y' - \bar{y} \rangle \leq V(x', y')$$

minimizando sobre  $x'$ , se obtiene

$$\Leftrightarrow \forall y' : W(\bar{y}) + \langle \bar{q}, y' - \bar{y} \rangle \leq W(y')$$

$$\Leftrightarrow \bar{q} \in \partial W(\bar{y}) \quad \square$$

P2 (un ejemplo)  
consideremos ahora el problema

(2)

$$w(y) = \inf_{F(x,y) \leq 0} U(x,y)$$

para  $\bar{y} \in Y$ , caracterice los elementos de  $\partial w(\bar{y})$ .  
~~8/11~~ Indicar las condiciones que le permitan utilizar el teorema de Moreau-Rockafeller.

Sol: Vemos que por P2,  $\bar{q} \in \partial w(\bar{y})$   
 $\Leftrightarrow (0, \bar{q}) \in \partial V(\bar{x}, \bar{y}) = \partial (U + \delta_{\{x | F(x, \bar{y}) \leq 0\}})(\bar{x}, \bar{y})$   
(las condiciones de M-R piden que exista  $x$  e que  $F(\cdot, \bar{y})$  sea continua y finita mientras  $U(x, \bar{y}) < \infty$ .  
si suponemos  $F$  continua entonces pide que exista  $x_{\bar{y}} \in \text{dom}(U)$  tal que  $F(x_{\bar{y}}, \bar{y}) < 0$ .  
(condición de Slater).

Bajo esa condición,  $\bar{q} \in \partial w(\bar{y}) \Leftrightarrow$   
 $(0, \bar{q}) \in \partial U(\bar{x}, \bar{y}) + \partial \delta_{\Gamma_0(F)}(\bar{x}, \bar{y})$

$$\Leftrightarrow (0, \bar{q}) \in \partial U(\bar{x}, \bar{y}) + N_{\Gamma_0(F)}(\bar{x}, \bar{y}) - (0, \bar{q})$$

$$\Leftrightarrow \exists (x^*, y^*) \in \partial U(\bar{x}, \bar{y}) \text{ t. } \bar{q} - (x^*, y^*) \in N_{\Gamma_0(F)}(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\Leftrightarrow (-x^*, \bar{q} - y^*) \in N_{\Gamma_0(F)}(\bar{x}, \bar{y}) //$$

Nota: En particular, si se toma  $U$  finita y diferenciable, la condición de calificación pide (3)  
 que exista  $\bar{x} \in X$  tal que  $F(x, \bar{y}) < 0$   
 (para todo  $\bar{y} \in Y$ ). De ese modo,  
 $\bar{q} \in \partial W(\bar{y}) \Leftrightarrow (-\nabla_x U(\bar{x}, \bar{y}), \bar{q} - \nabla_y U(\bar{x}, \bar{y}))$   
 $\in N_{\Gamma_0(P)}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \square.$