

P2 | (Dual de un problema convexo) ①
 considere el problema convexo

$$(P) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^m} f(x) \quad g_i(x) \leq 0 \quad \forall i=1 \rightarrow P.$$

en que $f, (g_i); \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones convexas.
 calcule el problema dual de (P) asociado a una perturbacion de las restricciones.

sol: vemos que sin perturbacion,

$$\varphi(x, 0) = f(x) + \delta_{\mathbb{R}_-}(g(x)).$$

proponemos entonces

$$\varphi(x, y) = f(x) + \delta_{\mathbb{R}_-}(g(x) - y) \quad \begin{pmatrix} x = \mathbb{R}^m = x^* \\ y = \mathbb{R}^p = y^* \end{pmatrix}$$

y calculamos el dual notando que

$$\begin{aligned} \varphi^*(x^*, y^*) &= \sup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \{ \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle - f(x) - \delta_{\mathbb{R}_-}(g(x) - y) \} \\ &= \sup_{x \in X} \{ \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle - f(x) + \sup_{y \in Y} \{ \langle y^*, y \rangle - \delta_{\mathbb{R}_-}(g(x) - y) \} \} \\ &= \sup_{x \in X} \{ \langle x^*, x \rangle - f(x) + \sup_{y \geq g(x)} \langle y^*, y \rangle \} \\ &= \sup_{x \in X} \{ \langle x^*, x \rangle - f(x) + \delta_{\mathbb{R}_-}(y^*) + \langle y^*, g(x) \rangle \} \\ &= \delta_{\mathbb{R}_-}(y^*) + \sup_{x \in X} \{ \langle x^*, x \rangle - (f(x) - \langle y^*, g(x) \rangle) \} \\ &= \delta_{\mathbb{R}_-}(y^*) + (f^*(x^*) - \langle y^*, g(x^*) \rangle) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que

(2)

$$(D) \leq \inf_{y^* \in Y^*} \varphi^*(0, y^*)$$

$$= \inf_{y^* \in \mathbb{R}_-^p} (f(\cdot) + \langle y^*, g(\cdot) \rangle)^*(0)$$

$$= \inf_{y^* \in \mathbb{R}_-^p} \left(\sup_{x \in X} (f(x) - \langle y^*, g(x) \rangle) \right) \quad \square$$

obs: $f(x) - \langle y^*, g(x) \rangle = L(x, y^*)$ es lo que
llamamos Lagrangeano del problema.

P2 (Relajación de Lagrange)

obtenga el dual del problema

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \langle C, x \rangle \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \in \mathbb{R}^m \\ & x_i(1-x_i) = 0 \quad i=1, \dots, n. \end{aligned} \quad (P)$$

Sol: para esto, usamos parte ~~(P)~~ Escribimos

$$\begin{aligned} (P) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \langle C, x \rangle \\ & \cancel{b} \quad Ax - b \leq 0 \in \mathbb{R}^m, \quad (\mu) \\ & x_i(1-x_i) \leq 0 \quad , (V_i^-) \\ & -x_i(1-x_i) \leq 0 \quad , (V_i^+) \end{aligned}$$

De modo que identifiquemos $f(x) = \langle C, x \rangle$,
 $p = m + 2n$, $y^* = (\mu, V^-, V^+)$. y

$$g(x) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ (x_i(1-x_i))_i \\ (x_i(x_i-1))_i \end{pmatrix}$$

De modo que

$$f(x) - \langle y^*, g(x) \rangle = \langle C, x \rangle - \langle \mu, Ax - b \rangle - \langle V^- - V^+, x_i(1-x_i) \rangle$$

Haciendo $v = V^- - V^+$, tenemos variable de optimización $v \in \mathbb{R}^n$
 obtenemos

$$f(x) - \langle y^*, g(x) \rangle = \langle \mu, b \rangle + \langle C - A^T \mu, x \rangle - \sum_{i=1}^n v_i x_i(1-x_i)$$

Entonces:

(9)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ f(x) - \langle y^*, g(x) \rangle \}$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle c - A^T m, x \rangle + \sum_{i=1}^m v_i \left(\frac{1-x_i}{2} \right) x_i \right\} + \langle m, b \rangle$$

(columna i de A)

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{i=1}^m x_i (c_i - \langle a_i, m \rangle) + x_i v_i \left(\frac{1-x_i}{2} \right) \right\} + \langle m, b \rangle$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{i=1}^m \left(-\frac{v_i}{2} x_i^2 + (c_i - \langle a_i, m \rangle + \frac{v_i}{2}) x_i \right) \right\} + \langle m, b \rangle$$

la derivada es $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{v_i}{2} x_i^2 + (c_i - \langle a_i, m \rangle + \frac{v_i}{2}) x_i \right) = 0$
 concava.
 como $x_i \in [0, 1]$ es + ∞ .
 como $x_i \in [0, 1]$ es + ∞ .

$$-v_i x_i + (c_i + v_i - \langle a_i, m \rangle) = 0$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{c_i + v_i - \langle a_i, m \rangle}{2v_i}$$

de donde el ítem es

$$-v_i \frac{(c_i + v_i - \langle a_i, m \rangle)^2}{4v_i^2} + \frac{2(c_i + v_i - \langle a_i, m \rangle)^2}{4v_i}$$

$$= \frac{1}{4v_i} (c_i + v_i - \langle a_i, m \rangle)^2$$

el problema dual queda entonces

$$\inf_{\substack{m \leq 0 \\ v \in \mathbb{R}_+^m}} \left\{ \langle m, b \rangle + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m \frac{(c_i + v_i - \langle a_i, m \rangle)^2}{v_i} \right\} + \frac{f^*}{\mathbb{R}^n}$$

≥ 0 .

Observamos que la función

(5)

$$V_i \geq 0 \xrightarrow{h_i} (c_i + V_i - \langle a_i, m \rangle)^2 / V_i$$

es convexa con

$$h_i'(V_i) = \frac{2(c_i + V_i - \langle a_i, m \rangle)V_i - (c_i + V_i - \langle a_i, m \rangle)^2}{V_i^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(c_i + V_i - \langle a_i, m \rangle)(V_i - c_i + \langle a_i, m \rangle)}{V_i^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow V_i^* = \pm (c_i - \langle a_i, m \rangle)$$

(la que sea ≥ 0
es la que buscamos)

Valor mínimo:

$$h_i(V_i^*) = \begin{cases} \frac{4(c_i - \langle a_i, m \rangle)^2}{c_i - \langle a_i, m \rangle} \\ 0 \end{cases}$$

$$c_i - \langle a_i, m \rangle \geq 0$$

$$c_i - \langle a_i, m \rangle \leq 0$$

Nos queda entonces el problema

$$\inf_{\mu \leq 0} \left\{ \langle \mu, b \rangle + \sum_{i=1}^m \max \{ 0, c_i - \langle a_i, m \rangle \} \right\} \quad \square$$