

Fórmula de Lax-Deimik

①

Sean $f, \theta \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ con $\theta(\cdot)$ finita y diferenciable en todo $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \frac{\theta(y)}{\|y\|} = \infty.$$

Dada la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$(HJ) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \theta^*(\nabla_x u(t, x)) = 0 & (t > 0, x \in \mathbb{R}^n) \\ u(0, x) = f(x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}.$$

consideremos $\varphi(t, x, y) := f(x - y) + t \theta\left(\frac{y}{t}\right) + \delta_{[0, \infty)}(t)$. ^(H)

vamos a probar que

$$u(t, x) := \begin{cases} \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi(t, x, y) & t > 0 \\ f(x) & t = 0 \\ +\infty & t < 0. \end{cases}$$

es solución de (HJ). por ello:

a) prueba que φ es convexa y deduzca que u es convexa en $t > 0$.

Rem: Sabemos que $(t, x, y) \mapsto f(x - y)$ es convexa porque $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ y en virtud de la propiedad de composición con una función lineal. También sabemos que $\delta_{[0, \infty)}(t)$ es convexo.

Por lo que basta ver que $h(t, x, y) = t \theta(y/t)$ es convexa. Por definición, vemos que si $(t_1, x_1, y_1), (t_2, x_2, y_2) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\lambda \in (0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} & h(\lambda(t_1, x_1, y_1) + (1-\lambda)(t_2, x_2, y_2)) \\ &= h(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \\ &= (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \theta\left(\frac{\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2}{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2}\right) \\ &= (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \theta\left(\frac{\lambda t_1}{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2} \cdot \frac{y_1}{t_1} + \frac{(1-\lambda)t_2}{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2} \cdot \frac{y_2}{t_2}\right) \\ &\leq (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \left(\frac{\lambda t_1}{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2} \theta\left(\frac{y_1}{t_1}\right) + \frac{(1-\lambda)t_2}{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2} \theta\left(\frac{y_2}{t_2}\right) \right) \\ &= \lambda t_1 \theta\left(\frac{y_1}{t_1}\right) + (1-\lambda)t_2 \theta\left(\frac{y_2}{t_2}\right) \\ &= \lambda h(t_1, x_1, y_1) + (1-\lambda)h(t_2, x_2, y_2) \quad \square. \end{aligned}$$

Así, ψ es convexa y por propiedad de funciones marginales (Bonus #2), se tiene que u es convexa en $t > 0$.

b) pruebe que para $t \geq 0$, el óptimo en $u(t, x)$ existe. Deduzca que u es continua en $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

Dem. Para $t \geq 0$, tenemos

$$\varphi(t, x, y) = f(x - y) + t \theta(y/t)$$

que es claramente ^{sc} ~~coerciva~~ como función de y .

Para chequear coercividad ($\Rightarrow$ inf-compatibilidad), vemos que ya que $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ existe $\alpha > 0$ tal que
a fm $x^* \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) \geq \langle x^*, x \rangle + \alpha$$

De modo que

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, y) &\geq \langle x^*, x - y \rangle + \alpha + t \theta(y/t) \\ &\geq -\|x^*\| (\|x\| + \|y\|) + \alpha + t \theta(y/t) \end{aligned}$$

en vista de la condición de crecimiento de θ ,
tenemos que

$$\forall m > 0, \exists R > 0, \|y\| > R \Rightarrow \theta(y) \geq m \|y\|$$

Tomando $m = 2\|x^*\|$, obtenemos $R > 0$ t. q

$$\|y\| > R \Rightarrow t \theta(y/t) \geq 2\|x^*\| \|y\|$$

De modo que para $\|y\| > R$, tenemos

$$\varphi(t, x, y) \geq \|x^*\| (\|y\| - \|x\|) + \alpha \xrightarrow{(\|y\| \rightarrow \infty)} \infty$$

De este modo, $\varphi(t, x, \cdot)$ es coerciva y $\textcircled{4}$
 el infimo se alcanza en algún $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ tal
 que

$$\varphi(t, x, \bar{y}) = U(t, x).$$

~~Para verificar la continuidad de $U(t, x)$ en $t \rightarrow 0$,~~
 por propiedad de convexidad y continuidad,
 sabemos que U continua en $\text{int}(\text{dom}(u))$
 $= (0, \infty) \times \mathbb{R}^m$. Para concluir la continuidad en
 $[0, \infty)$, nos queda probar que para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo,

$$U(t, x) \xrightarrow{(t \searrow 0)} f(x)$$

Ahora, sea $t > 0$ y consideremos $\bar{y}$ algún elemento
 de $\arg \min_{y \in \mathbb{R}^m} \{\varphi(t, x, y)\}$. Sabemos que

$$\varphi(t, x, \bar{y}) = \inf_{y \in \mathbb{R}^m} \varphi(t, x, y) \leq \varphi(t, x, 0)$$

$$= f(x) + t \theta(0)$$

$$\Rightarrow t \theta(\bar{y}/t) \leq f(x) - f(x - \bar{y}) + t \theta(0)$$

como $\theta(\cdot)$ está acotado, tenemos que hay

$R > 0$ tal que $\|\bar{y}\| \leq R t \Leftrightarrow \|\bar{y}/t\| \leq R$.

De modo que conforme $t \rightarrow 0$, la expresión
 $\theta(\bar{y}/t)$ se mantiene acotada uniformemente.

Assi obtenemos

③

$$\varphi(t, x, \bar{y}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x).$$

porque u continua em $t=0$. Assim, u continua em $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ e em consequência em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

c) prove que

$$(t^*, x^*) \in \partial u(t, x) \Leftrightarrow (t^*, x^*, 0) \in \partial \varphi(t, x, \bar{y})$$

Debn.

Ademais, cda φ^* em termos de f, θ .

Dem: vemos que

$$(t^*, x^*, 0) \in \partial \varphi(t, x, \bar{y})$$

$$\Leftrightarrow \forall (t', x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m :$$

$$\varphi(t, x, \bar{y}) + \langle (t^*, x^*, 0), (t', x', y') - (t, x, \bar{y}) \rangle$$

$$\leq \varphi(t', x', y'). \quad \text{com } y' = \bar{y}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(t, x, \bar{y}) + t^*(t' - t) + \langle x^*, x' - x \rangle \leq \varphi(t', x', y')$$

$$\Leftrightarrow \varphi(t, x, \bar{y}) + t^*(t' - t) + \langle x^*, x' - x \rangle \leq \inf_{y' \in \mathbb{R}^m} \varphi(t', x', y')$$

$$= \varphi(t', x', \bar{y})$$

$$\text{Logo } \varphi(t, x, \bar{y}) = u(t, x) \mid \varphi(t', x', \bar{y}) = u(t', x'),$$

$$\Rightarrow u(t, x) + \langle \psi^*(x), (t' - t, x' - x) \rangle \leq u(t', x') \quad (6)$$

$$\Rightarrow (t^*, x^*) \in \partial u(t, x) \quad \square.$$

venmos ahora el subdiferencial como sigue:

$$\varphi^*(t^*, x^*, y^*) = \sup_{t > 0, x \in \mathbb{R}^n} \{ t^* t + \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle - \varphi(t, x, y) \}$$

$$= \sup_{t > 0, x \in \mathbb{R}^n} \{ t^* t + \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle - f(x - y) - t \theta(\frac{y}{t}) \}$$

$$= \sup_{t > 0} \{ t^* t + \langle x^* + y^*, y \rangle - t \theta(\frac{y}{t}) + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x^*, x - y \rangle - f(x - y) \} \}$$

$$= \sup_{t > 0} \{ t^* t + t \langle x^* + y^*, \frac{y}{t} \rangle - t \theta(\frac{y}{t}) + f^*(x^*) \}$$

$$= \sup_{t > 0} \{ t^* t + t \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x^* + y^*, \frac{y}{t} \rangle - \theta(\frac{y}{t}) \} + f^*(x^*) \}$$

$$= \sup_{t > 0} \{ t [t^* + \theta^*(x^* + y^*)] + f^*(x^*) \}.$$

$$= \sup_{t > 0} \{ t [t^* + \theta^*(x^* + y^*)] + f^*(x^*) \} \leq 0.$$

$$= \begin{cases} f^*(x^*) & , \\ \infty & / \end{cases} \quad t^* + \theta^*(x^* + y^*) > 0 \quad \square$$

d) Deduzca que si $(t^*, x^*) \in \partial u(t, x)$, $(y, t > 0)$ ⑦
entonces se tiene que

$$(i) \quad t^* + \theta^*(x^*) = 0$$

$$(ii) \quad x^* \in \mathcal{A}(x - \bar{y})$$

$$(iii) \quad x^* = \nabla \theta(\bar{y}, t)$$

Dem: Notamos que

$$u(t, x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{ f(x - y) - t \theta(\bar{y}, t) \}$$

$$= (f \square t \theta(\bar{\cdot}, t))(x)$$

Por b), esta inf-convolucion es exacta en $\bar{y}$
Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, de modo que

$$\partial u(t, \cdot)(x) \stackrel{(Aux \#6)}{=} \mathcal{A}(x - \bar{y}) \cap \partial(t \theta(\bar{\cdot}, t))(\bar{y})$$

y como θ es diferenciable,

$$\partial(t \theta(\bar{\cdot}, t))(\bar{y}) = \{ t \nabla \theta(\bar{y}, t) \cdot \frac{1}{t} \} = \{ \nabla \theta(\bar{y}, t) \}$$

Además: $(t^*, x^*) \in \partial u(t, x) \Rightarrow$

$$\forall (t', x') : u(t', x') - u(t, x) + \langle (t^*, x^*), (t', x') - (t, x) \rangle \leq u(t', x')$$

$$\text{con } t' = t,$$

$$\Rightarrow \forall x' : u(t, x) + \langle x^*, x' - x \rangle \leq u(t, x)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^* \in \partial u(t, \cdot)(x) \\ x^* \in \partial u(t^*, \cdot)(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^* \in \mathcal{A}(x - \bar{y}) \\ x^* \in \nabla \theta(\bar{y}, t) \end{array}$$

esto prueba (ii) y (iii), para (i), usamos (C) como sigue: (8)

$$(t^*, x^*) \in \partial \mathcal{U}(t, x) \Leftrightarrow (t^*, x^*, 0) \in \partial \varphi(t, x, \bar{y})$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{t^* t + \langle x^*, x \rangle}_{\text{finito}} = \varphi(t, x, \bar{y}) + \varphi^*(t^*, x^*, 0)$$

$$\Leftrightarrow t^* t + \langle x^*, x \rangle = f(x - \bar{y}) + t \theta(\bar{y}/t) + f^*(x^*)$$

$$\Leftrightarrow t^* t - t \theta(\bar{y}/t) = f(x - \bar{y}) + f^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle$$

(en particular $t^* + \theta^*(x^* + \bar{y}) \leq 0$)

Ahora, usamos q e

$$x^* \in \partial f(x - \bar{y}) \Leftrightarrow$$

$$f(x - \bar{y}) + f^*(x^*) = \langle x^*, x - \bar{y} \rangle$$

$$\Leftrightarrow f(x - \bar{y}) + f^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle = -\langle x^*, \bar{y} \rangle$$

queda que

$$(t^*, x^*) \in \partial \mathcal{U}(t, x) \Leftrightarrow$$

$$t^* t - t \theta(\bar{y}/t) = \langle x^*, \bar{y} \rangle$$

$$t^* t - t \theta(\bar{y}/t) + \langle x^*, \bar{y} \rangle = 0.$$

$$\Leftrightarrow t^* \left(t - \theta(\bar{y}/t) + \frac{\langle x^*, \bar{y} \rangle}{t} \right) = 0.$$

Ahora, usamos que $x^* \in \partial \theta(\bar{y}/t) \Leftrightarrow$

$$\theta(\bar{y}/t) + \theta^*(x^*) = \langle x^*, \bar{y}/t \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle x^*, \bar{y}/t \rangle - \theta(\bar{y}/t) = \theta^*(x^*)$$

Queda que

$$(t^*, x^*) \in \partial U(t, x)$$

⑨

$$\Rightarrow t^* + \theta^*(x^*) = 0 \quad (\text{que es (i)}) \quad \square$$

e) concluyan que $U(\cdot, x)$ es diferenciable en $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ y satisface (H-J).

Dem: la condición de borde es clara.

Ahora, como U es continua por (b) y (a), tenemos por Teorema 2.4.1 del apunte, que U es subdiferenciable.

$$\Rightarrow \exists (t^*, x^*) \in \partial U(t, x) \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

pero por (i), x^* es único y t^* también por (i).

Así, para $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $\partial U(t, x)$ es un singleton y se que U es continua en vista del corolario 2.4.1, U es diferenciable con

$$t^* = \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) \quad \Bigg| \quad x^* = \nabla_x U(t, x).$$

por (i), se tiene entonces

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, x) + \theta^*(\nabla_x U(t, x)) = 0 \quad \square.$$