

**MA5801 Análisis Convexo y Dualidad****Profesor:** Alejandro Jofré**Auxiliar:** Benjamín Vera Vera

# Auxiliar 8

*Subdiferencial II*

7 de octubre de 2024

**P1. (Fórmula de Lax-Oleinik)** Sean  $f, \theta \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$  con  $\theta(\cdot)$  finita y diferenciable en todo  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} = \infty$$

Dada la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \theta^*(\nabla_x u(t, x)) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\text{HJ})$$

Consideremos  $\varphi(t, x, y) := f(x - y) + t\theta(y/t) + \delta_{[0, \infty)}(t)$ . El objetivo de esta pregunta es probar que la solución de [HJ](#) viene dada por

$$u(t, x) = \begin{cases} \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi(t, x, y), & t > 0 \\ f(x), & t = 0 \\ +\infty, & t < 0 \end{cases}$$

Para ello, proceda como sigue:

- Pruebe que  $\varphi$  es convexa y deduzca que  $u$  es convexa en  $t > 0$ .
- Pruebe que para  $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ , el óptimo en  $u(t, x)$  se alcanza. Deduzca que  $u$  es continua en  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ .
- Pruebe que

$$(t^*, x^*) \in \partial u(t, x) \iff (t^*, x^*, 0) \in \partial \varphi(t, x, \bar{y})$$

En que  $\bar{y} \in \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi(t, x, y)$ . Además, calcule  $\varphi^*$  en términos de  $f^*$  y  $\theta^*$ .

- Deduzca que si  $(t^*, x^*) \in \partial u(t, x)$  y  $t > 0$ , entonces se tienen las siguientes proposiciones

- $t^* + \theta^*(x^*) = 0$
- $x^* \in \partial f(x - \bar{y})$
- $x^* = \nabla \theta(\bar{y}/t)$

- Concluya que  $u(\cdot, \cdot)$  es diferenciable en  $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  y satisface [HJ](#).