MA5801 Análisis Convexo y Dualidad
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Control 1

Duración: 4 : 00 hrs
5 de octubre de 2024

P1. *a)* (3 pts) Sea (X,d) un espacio métrico completo y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ propia, semicontinua inferior y acotada inferiormente. Suponga que para cada $x \in X$ con $f(x) > \inf f$, existe $\overline{x} \neq x$ tal que

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + d(x, \overline{x})$$

Pruebe que $\operatorname{argmin} f \neq \varnothing$ y que para todo $x \in X$, se tiene que

$$d(x, \operatorname{argmin}(f)) \leq f(x) - \inf f$$

b) (3 pts) Sea $(S^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el espacio de las matrices simétricas con el producto interno usual $\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(XY)$ y consideremos los siguientes conjuntos:

- $S^n_+ = \{X \in \mathcal{S}^n : X \text{ semidefinida positiva}\}$
- $S^n_{++} = \{X \in \mathcal{S}^n : X \text{ definida positiva}\}$

Definimos la función $f : \mathcal{S}^n_{++}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(X) = \operatorname{tr}\big(X^{-1}\big)$$

Pruebe que $\operatorname{dom}(f^*) = -\mathcal{S}^n_+(\mathbb{R})$ y que la conjugada está dada por

$$f^*(Y) = -2 \operatorname{tr}\Big((-Y)^{1/2}\Big)$$

En que $A^{1/2}$ denota a la (única) matriz $B \in \mathcal{S}^n_+$ tal que $A = BB$
Indicación: Utilice que $\boldsymbol{\nabla} f(X) = -X^{-2}$. Suponga primero que $Y \in -\mathcal{S}^n_{++}$.

P2. (6 pts) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ boreliano y $u : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Borel medible tal que para algún $a \in L^1(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\forall \omega : y \mapsto u(\omega, y) \text{ s.c.i.} \tag{1}$$

$$\forall (\omega, y) : u(\omega, y) \geq -a(\omega) - c\|y\|^2 \tag{2}$$

Pruebe que el funcional $U : L^2(\Omega, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dado por

$$U(x) = \int_\Omega u(\omega, x(\omega))\, \mathrm{d}\omega$$

es s.c.i.

P3. Sea H un espacio de Hilbert en dualidad consigo mismo.

a) (3 pts) Sean $f \in \Gamma_0(H)$ y $S \subseteq H$ subespacio vectorial cerrado. Muestre que si $S \cap \operatorname{dom}(f) \neq \varnothing$, entonces $f + \delta_S \in \Gamma_0(H)$ y se tiene que

$$(f + \delta_S)^* = (f \circ P_S)^* \circ P_S$$

En que $P_S : H \to H$ denota al operador de proyección ortogonal sobre S.

b) (3 pts) Supongamos ahora que $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle$ con $A : H \to H$ operador lineal continuo autoadjunto y semidefinido positivo. Pruebe que

$$(f + \delta_S)^*(x^*) = \begin{cases} \frac{1}{2}\langle P_S(x^*), x \rangle & \text{si } x^* \in A(S) + S^\perp \text{ con } (P_S \circ A \circ P_s)(x) = P_S(x^*) \\ \infty & \text{si no} \end{cases}$$