P2/ a) Sea (X,d) un espacio métrico completo y $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ propia sci inferiormente acotada. Suponga que para $x \in X$ con $f(x) > \inf(f)$, existe $\overline{x} \in X \setminus \{x\}$ tal que

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + d(x,\overline{x}).$$

Pruebe que $\operatorname{argmin}(f) \neq \emptyset$ y que $d(x, \operatorname{argmin}(f)) \leq f(x) - \inf(f)$. $\forall x \in X$.

Dem: Como f propia, $\exists x_0 \in X$, $f(x_0) < \infty$. Supongamos spg que $x_0 \notin \operatorname{argmin}(f)$ (si no existiera tal x_0, f sería constante y el resultado se tiene). De modo que

$$f(x_0) - \inf(f) > 0.$$

Definiendo $\varepsilon = f(x_0) - \inf(f)$, tenemos $x_0 \in \varepsilon\text{-}\operatorname{argmin}(f)$. De modo que por principio variacional de Ekeland, ~~existe~~ para $\lambda > 0$, existe $\overline{x} \in X$ con

(i) $f(\overline{x}) \leq f(x_0)$

(ii) $d(x_0, \overline{x}) \leq \lambda$

(iii) $\forall x \neq \overline{x}$: $f(\overline{x}) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x,\overline{x})$.

Tomando $\lambda = \varepsilon$, tenemos $\overline{x} \in \operatorname{argmin}(f)$, ya que de lo contrario, existiría por hipótesis $x \neq \overline{x}$ tal que

$$f(\overline{x}) \geq f(x) + d(x,\overline{x})$$ que contradice (iii)

Así, $\overline{x} \in \operatorname{argmin}(f)$ y $\operatorname{argmin}(f) \neq \emptyset$.

Además, por $\boxed{2}$

$$d(x_0, \operatorname{argmin}(f)) \leq d(x_0, \bar{x}) \leq \lambda = f(x_0) - \inf(f)$$

esto pasa para $x_0 \in dom(f)$. Y para $x_0 \notin dom(f)$ la desigualdad es evidente. Así se concluye lo pedido $\square$.

b) Sea $(S^m, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el espacio de las matrices con el producto interno usual $\langle X, Y\rangle = tr(XY)$ y (3)

Consideremos :

- $S_+^m = \{X \in S^m \mid X \succeq 0\}$
- $S_{++}^m = \{X \in S^m \mid X \succ 0\}$

Definimos $f: S_{++}^m \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(X) = tr(X^{-1})$$

pruebe que $dom(f^*) = -S_+^m = S_-^m$ y que la conjugada está dada por

$$f^*(Y) = -2\,tr((-Y)^{1/2})$$

<u>Dem</u>: Sea $Y = Q\Lambda Q^T$ con $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ con $\lambda_1 > 0$. Para $X = Q\tilde{\Lambda}Q^T$ con $\tilde{\Lambda} = diag(x_1, \ldots, x_m)$ y $x_i > 0$, vemos que

$$tr(XY) - tr(X^{-1})$$

$$= tr(Q\tilde{\Lambda}Q^T Q\Lambda Q^T) - \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i}$$

$$= tr(Q\tilde{\Lambda}\Lambda Q^T) - \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} \qquad (\tilde{\Lambda}\Lambda = diag(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_m x_m))$$

$$= \sum_{i=1}^m x_i\lambda_i - \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i}. \qquad \text{Tomamos } x_1 = t \text{ y } x_i = 1 \ \forall i > 1.$$

$$= t\lambda_1 + \sum_{i\geq 2} \lambda_i - \frac{1}{t} - (m-1) \xrightarrow[(t\to\infty)]{} \infty$$

Así, el supremo es no acotado para Y con algún $\lambda_i > 0$. Entonces el dominio está en S_-^n. (4)

Ahora, para $Y \preceq 0$, vemos que la función

$$X \longmapsto \operatorname{tr}(XY) - \operatorname{tr}(X^{-1})$$

es cóncava. De modo que evaluamos el gradiente, obteniendo que

$$Y + X^{-2} = 0 \Rightarrow X^{-2} = -Y$$

$$\Rightarrow X^2 = (-Y)^{-1} \Rightarrow X = (-Y)^{-1/2}.$$

Entonces, evaluando el supremo,

$$f^*(Y) = \langle (-Y)^{-1/2}, Y \rangle - \operatorname{tr}((-Y)^{1/2})$$

$$= \operatorname{tr}((-Y)^{-1/2}(-Y)) - \operatorname{tr}((-Y)^{1/2})$$

$$= -\operatorname{tr}((-Y)^{1/2}) - \operatorname{tr}((-Y)^{1/2})$$

$$= -2\operatorname{tr}((-Y)^{1/2}).$$ / que es lo pedido.

Finalmente, ya que f^* es siempre una función convexa, la cerradura de $\operatorname{epi}(f^*)$ obliga a que $f^*(Y) = -2\operatorname{tr}((-Y)^{1/2})$ siga siendo válida para $Y \preceq 0$. $\square$.

P2 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ Boreliano y $u: \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (2)
Borel-medible tal que para algún $a \in L^1(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$, se cumple

(1) $\forall \omega \quad y \mapsto u(\omega, y)$ sci

(2) $\forall (\omega, y): u(\omega, y) \geq -a(\omega) - c\|y\|^2$.

Pruebe que el funcional $U: L^2(\Omega, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dado por

$$U(x) = \int_\Omega u(\omega, x(\omega))\, d\omega$$

es sci.

Dem: Considere el funcional $V: L^2(\Omega, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dado por

$$V(x) = \int_\Omega \underbrace{[u(\omega, x(\omega)) + a(\omega) + c\|x(\omega)\|^2]}_{\geq 0 \text{ y sci c/r a } x} d\omega$$

Al ser funcional de Nemitski de una función positiva sci, tenemos que V es sci. Además,

$$V(x) = U(x) + \int_\Omega a(\omega)\, d\omega + c\|x\|_2^2$$

$$\Rightarrow U(x) = \underbrace{V(x)}_{\text{sci}} - \underbrace{\int_\Omega a(\omega)}_{\text{constante}} - \underbrace{c\|x\|_2^2}_{\text{continuo}}$$

De modo que por suma de funciones sci, U es sci $\square$.

P3 Sea H un espacio de Hilbert en dualidad consigo mismo. ①

(a) Sean $f \in \Gamma_0(H)$ y $S \subseteq H$ s.e.v. cerrado. Muestre que si $S \cap \mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$, entonces $f + \delta_S \in \Gamma_0(H)$ y se tiene que

$$(f+\delta_S)^* = (f \circ P_S)^* \circ P_S.$$

Dem: Hay que probar que $f + \delta_S$ es:

- → propia
- → convexa
- → semicontinua inferior.

La convexidad y la sci se tienen por suma de funciones convexas y sci, mientras que la hipótesis garantiza que $f + \delta_S$ es propia.

Para la identidad, notamos que

$$((f \circ P_S)^* \circ P_S)(x^*) = (f \circ P_S)^*(P_S(x^*))$$

$$= \sup_{x \in H} \{ \langle P_S(x^*), x \rangle - f(P_S \circ P_S(x)) \} \quad / \ P_S \circ P_S = P_S$$

$$= \sup_{x \in H} \{ \langle P_S(x^*), x \rangle - f(P_S(x)) \} \quad / \ P_S \text{ autoadjunto.}$$

$$= \sup_{x \in H} \{ \langle x^*, P_S(x) \rangle - f(P_S(x)) \}$$

$$= \sup_{z \in S} \{ \langle x^*, z \rangle - f(z) \} = \sup_{z \in H} \{ \langle x^*, z \rangle - f(z) - \delta_S(z) \}$$

$$= (f+\delta_S)^*(x^*) \quad \square.$$

(b) supongamos ahora que $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$ ②
con $A: H \to H$ operador lineal continuo autoadjunto y semidefinido positivo. Pruebe que

$$(f+\delta_S)^*(x^*) = \begin{cases} \frac{1}{2}\langle P_S(x^*), x\rangle & \text{si } x^* \in A(S) + S^\perp \text{ con } (P_S \circ A \circ P_S)(x) = P_S(x^*) \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

<u>Dem</u>: es claro que $f \in \Gamma_0(H)$ con $\operatorname{dom}(f) = H$ por lo que podemos usar (a) vemos que

$$(f+\delta_S)^*(x^*) = (f \circ P_S)^*(P_S(x^*))$$

$$= \sup_{x\in H}\{\langle P_S(x^*), x\rangle - (f\circ P_S)(x)\}$$

$$= \sup_{x\in H}\{\langle P_S(x^*), x\rangle - \frac{1}{2}\langle (A\circ P_S)(x), P_S(x)\rangle\}$$

$$= \sup_{x\in H}\{\langle P_S(x^*), x\rangle - \frac{1}{2}\langle (P_S\circ A\circ P_S)(x), x\rangle\}$$

Notamos que esta funciones frechet-diferenciable y cóncava ya que $P_S \circ A \circ P_S$ es semidef. positivo. entonces el supremo se alcanza para $\bar{x}$ que tendría la ecuación

$$P_S(x^*) - (P_S\circ A\circ P_S)(\bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow (P_S\circ A\circ P_S)(\bar{x}) = P_S(x^*)$$

Notar que por concavidad, nos basta el escribirla existencia de soluciones a esta ecuación, ya que si no hay unicidad, de todos modos tenemos que el supremo no cambia en virtud de que los puntos críticos de funciones cóncavas son max-globales.

Discutimos entonces las condiciones sobre x^* para la existencia de $\bar{x}$.

$$(P_S \circ A \circ P_S)(\bar{x}) = P_S(x^*).$$

Escribiendo $x^* = x^*_S + x^*_{S^\perp}$ con $x^*_S \in S$ y $x^*_{S^\perp} \in S^\perp$, tenemos que la ec. equivale a

$$(P_S \circ A \circ P_S)(\bar{x}) = x^*_S$$

$$(x^*_S \in S)$$

que tiene solución si $x^*_S \in \operatorname{Im}(P_S \circ A \circ P_S)$

$$\Leftrightarrow x^*_S \in \operatorname{Im}(A \circ P_S)$$

$$\Leftrightarrow \exists z \in S : Az = x^*_S$$

$$\Leftrightarrow x^*_S \in A(S)$$

Entonces, la sol $\bar{x}$ existe si $x^* \in A(S) + S^\perp$. y el supremo queda $\frac{1}{2}\langle P_S(x^*), \bar{x}\rangle$.

En el caso en que no hay existencia, queda una función cóncava sin punto crítico, por lo que el supremo es $+\infty$, que concluye lo pedido $\square$.