

P1 (Teorema de nouveau) [problem 2.2 del apunte] ①
 Sea x e.v.m en dualidad con x^* y $f \in \Gamma_0(x)$. Pruebe
 que LSE:

(a) f coerciva

(b) $\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} > 0$.

(c) $0 \in \text{int}(\text{dom}(f))$.

Dem: (b) $\Rightarrow$ (a). (no requiere $f \in \Gamma_0(x)$)

supongamos $\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} > 0$. y utilizaremos que

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|x\| \geq r} \frac{f(x)}{\|x\|} = \sup_{r > 0} \inf_{\|x\| \geq r} \frac{f(x)}{\|x\|}.$$

Haciendo por ejemplo $\varepsilon = \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} / 2$, tenemos

$\varepsilon < \sup_{r > 0} \inf_{\|x\| \geq r} \frac{f(x)}{\|x\|}$. Por lo tanto, existe $r > 0$

tal que $\inf_{\|x\| \geq r} \frac{f(x)}{\|x\|} \geq \varepsilon$

es decir, existen ε, r tales que $\forall \|x\| \geq r$,

$$f(x) \geq \varepsilon \|x\|.$$

veremos entonces que para $y \in \mathbb{R}$, es claro que

$$x \in \Gamma_y(f) \Rightarrow \|x\| \leq \max \left\{ r, \frac{y}{\varepsilon} \right\} \Rightarrow f \text{ coerciva. } \square$$

(a) $\Rightarrow$ (b) (Aquí usamos convexidad)

(2)

Sea f coerciva. si $\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} \leq 0$,

entonces para $r > 0$, se tiene

$$\exists f \frac{f(x)}{\|x\|} \leq 0.$$

sea $k \in \mathbb{N}$. y utilice-os la desigualdad

$$\exists f \frac{f(x)}{\|x\|} \leq 0 < \frac{1}{k}.$$

Entonces, existe $x_k \in \text{dom}(f)$ con $\|x_k\| \geq k^2$ tal que

$$\frac{f(x_k)}{\|x_k\|} \leq \frac{1}{k}$$

Así, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cumple

$$\frac{\|x_k\|}{k} \rightarrow \infty \text{ y } \frac{f(x_k)}{\|x_k\|} \leq \frac{1}{k}.$$

Para $x \in \text{dom}(f)$, consideramos

$$y_k = x + \frac{k}{\|x_k\|} (x_k - x) = \frac{k}{\|x_k\|} x_k + \left(1 - \frac{k}{\|x_k\|}\right) x$$

Conv. convexa.

señalar que para k suf. grande, $\frac{k}{\|x_k\|} \in (0, 1)$ denodo
que y_k es conv. convexa entre puntos del dominio y
Por lo tanto $y_k \in \text{dom}(f)$

Ahora, veos f a

(3)

$$\|y_k - x\| = \frac{k}{\|x_k\|} \|x_k - x\| = \left\| k \frac{x_k}{\|x_k\|} - \frac{k}{\|x_k\|} x \right\|$$

$$\sum \left\| k \frac{x_k}{\|x_k\|} \right\|^k \left\| \frac{k}{\|x_k\|} \right\| \|x\| = k - \frac{k}{\|x_k\|} \|x\| \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

De modo que $e(y_k)$ no acotada, pero

$$f(y_k) \leq \underbrace{\frac{k}{\|x_k\|} f(x_k)}_{\leq 1} + \underbrace{\left(1 - \frac{k}{\|x_k\|}\right)}_{\leq 1} f(x)$$

$$\leq f(x) + 1 =: \forall < \infty.$$

Obtenemos $(y_k) \subseteq \Gamma_{\forall}(f)$ no acotada $\Rightarrow f$ no
coerciva $\square$

(b) $\Rightarrow$ (c).

Aquí utilizamos hint:

Asumir (sin demostración) que

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} > 0 \Leftrightarrow \exists \alpha, \varepsilon > 0 \text{ tales que } \forall x \in X:$$

$$f(x) \geq \varepsilon \|x\| - \alpha.$$

con eso en mente, probamos la equivalencia.

(b) $\Rightarrow$ (c)

(9)

$$f^*(x) = \sup_{x \in X} \{ \langle x^*, x \rangle - f(x) \}$$

$$\leq \sup_{x \in X} \{ \langle x^*, x \rangle - \varepsilon \|x\| \} + \alpha$$

$$= (\varepsilon \|\cdot\|)^*(x^*) + \alpha = \varepsilon \delta_{B(0,1)}(x^*/\varepsilon) + \alpha$$

$$= \delta_{B(0,\varepsilon)}(x^*) + \alpha$$

$\Rightarrow f^*$ unif. acotada en una vecindad del origen
y por lo tanto $0 \in \text{int}(\text{dom}(f^*))$.

Nota: ya que $f^* \in \Gamma_0(X^*)$, tb es continua en el origen.

por otro lado, $0 \in \text{int}(\text{dom}(f^*)) \Rightarrow f^*$ continua en el origen y por lo tanto, uniformemente acotada en una vecindad.

$$\exists \varepsilon, \alpha > 0 \text{ tales que } f^*(x^*) \leq \delta_{B(0,\varepsilon)}(x^*) + \alpha.$$

esto implica,

$$f(x) = f^{**}(x) = \sup_{x^* \in X^*} \{ \langle x^*, x \rangle - f^*(x^*) \}$$

$$\geq \sup_{\|x^*\| \leq \varepsilon} \{ \langle x^*, x \rangle \} - \alpha = \varepsilon \|x\| - \alpha.$$

$\Rightarrow f$ cumple (b) $\square$.

P2 (P2 control 1 2023)

②

Sea X normado, $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y φ linc. afm con $\|\varphi\| \leq 1$.

a) Demuestre que $\partial f(x) \subseteq \partial f^{\varphi}(x) \quad \forall x \in X$.

Dem. Recuerde que

$$y \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^{\varphi}(y) \leq \langle y, x \rangle \Leftrightarrow f(x) + f^{\varphi}(y) = \langle y, x \rangle.$$

ii)

Entonces, ya que sabemos que $f^{\varphi} \leq f$, tenemos

$$y \in \partial f(x) \Rightarrow f(x) + f^{\varphi}(y) \leq \langle y, x \rangle$$

pero como

$$f^{\varphi}(x) + f^{\varphi}(y) \leq f(x) + f^{\varphi}(y) \leq \langle y, x \rangle,$$

entonces $y \in \partial f^{\varphi}(x)$. $\square$

b) Para $x_0 \in X$ con $f(x_0) = f^{\varphi}(x_0)$, pruebe que $\partial f^{\varphi}(x_0) \subseteq \partial f(x_0)$.

Dem. $y \in \partial f^{\varphi}(x_0)$, entonces

$$f(x_0) + f^{\varphi}(y) = f^{\varphi}(x_0) + f^{\varphi}(y) \leq \langle y, x_0 \rangle$$

$\Rightarrow y \in \partial f(x_0) \quad \square$

c) conluye que $2f(A) \neq \emptyset \Rightarrow 2f(A) = 2f^{**}(A)$. (2)

Dem: supongamos $2f(A) \neq \emptyset$ y por contradicción
que $2f(A) \subsetneq 2f^{**}(A)$. Por (b), ello significaría
que $f^{**}(A) \subsetneq f(A)$.

Para $x^* \in 2f(A)$, se cumple que

$$\forall y \in X: \quad f(A) + \langle x^*, y - x \rangle \leq f^{**}(y) \leq f(y)$$

$$f^{**}(A) + \langle x^*, y - x \rangle <$$

$$\Rightarrow f^{**}(A) + \langle x^*, y - x \rangle < f^{**}(y) \quad (\forall y \in X)$$

con $y = x$, tenemos

$$f^{**}(A) \subsetneq f^{**}(A) \quad * \quad \square.$$