

MA5801 Análisis Convexo y Dualidad**Profesor:** Alejandro Jofré**Auxiliar:** Benjamín Vera Vera

Auxiliar 7

Preparación C1

4 de octubre de 2024

P1. (Teorema de Moreau) Sea X evn en dualidad con X^* y $f \in \Gamma_0(X)$. Pruebe que los siguientes son equivalentes:

- a) f coerciva.
- b) $\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} > 0$
- c) $0 \in \text{int}(\text{dom}(f^*))$

Indicación: Para la equivalencia (b) \iff (c), utilice que $\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} > 0$ si y solo si existen $\alpha, \varepsilon > 0$ tales que para $x \in X$, se tiene

$$f(x) \geq \varepsilon \|x\| - \alpha$$

P2. (P2 control 1 2023) Sea X evn y $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

- a) Demuestre que para todo $x \in X$, $\partial f(x) \subseteq \partial f^{**}(x)$.
- b) Sea $x_0 \in X$ con $f(x_0) = f^{**}(x_0)$. Pruebe que $\partial f^{**}(x_0) \subseteq \partial f(x_0)$.
- c) Concluya que $\partial f(x) \neq \emptyset \implies \partial f(x) = \partial f^{**}(x)$.