

P1 (subdiferencial de la inf-convolución)

①

Sean X, Y espacios en dualidad y $f, g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ convexas. Recordemos que definimos

$$(f \square g)(x) = \inf \{ f(x_1) + g(x_2) \mid x_1 + x_2 = x \}$$

y en el auxiliar anterior se probó que $(f \square g)^* = f^* + g^*$. pruebe ahora que si $\bar{x}_1 \in \text{dom}(f)$, $\bar{x}_2 \in \text{dom}(g)$ son tales que $(f \square g)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) + g(\bar{x}_2)$, entonces

$$\partial(f \square g)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \partial f(\bar{x}_1) \cap \partial g(\bar{x}_2)$$

Dem: Recordemos que para $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ convexa, se define

$$\partial f(x_0) = \{ y \in Y \mid \forall x \in X, f(x_0) + \langle y, x - x_0 \rangle \leq f(x) \}$$

y se tiene la equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (ii) en que

$$(i) \ y \in \partial f(x)$$

$$(ii) \ f(x) + f^*(y) \leq \langle y, x \rangle$$

en realidad la desigualdad $\geq$ en (ii) se tiene siempre, por lo que (ii) podría ser escrito con igualdad.

Teniendo esto en cuenta, vemos que

$$y \in \partial(f \square g)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$$

$$\Leftrightarrow (f \square g)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + (f \square g)^*(y) \leq \langle y, \bar{x}_1 \rangle + \langle y, \bar{x}_2 \rangle$$

$$\Leftrightarrow f(\bar{x}_1) + g(\bar{x}_2) + f^*(y) + g^*(y) \leq \langle y, \bar{x}_1 \rangle + \langle y, \bar{x}_2 \rangle$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(f(\bar{x}_1) + f^*(y) - \langle y, \bar{x}_1 \rangle \right)}_{(\geq 0)} + \underbrace{\left(g(\bar{x}_2) + g^*(y) - \langle y, \bar{x}_2 \rangle \right)}_{(\geq 0)} \leq 0 \quad (2)$$

(Young)
(Fenchel)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\bar{x}_1) + f^*(y) = \langle y, \bar{x}_1 \rangle \Leftrightarrow y \in \partial f(\bar{x}_1) \\ g(\bar{x}_2) + g^*(y) = \langle y, \bar{x}_2 \rangle \Leftrightarrow y \in \partial g(\bar{x}_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y \in \partial f(\bar{x}_1) \cap \partial g(\bar{x}_2) \quad \square$$

P2 (Función distancia)

③

Sea X Hilbert y $C \subseteq X$ convexo cerrado no vacío.

(a) pruebe que $\forall x \in X$:

$$\text{dist}_C(x) = \max_{\|x^a\|_x \leq 1} \{ \langle x^a, x \rangle - \sup_{y \in C} \langle x^a, y \rangle \}$$

Dem: sabemos que la función distancia es

→ propia

→ convexa (ver aux #4)

→ continua (propiedad obvia, de hecho es Lipschitz)

De modo que por propiedad de Biconjugada, tenemos que

$$\text{dist}_C(x) = \text{dist}_C^{**}(x)$$

Además, ya que $\text{dist}_C(x) = (\|\cdot\| \square \delta_C)(x)$

De modo que

$$\text{dist}_C(x) = \text{dist}_C^{**}(x) = (\|\cdot\| \square \delta_C)^{**}(x)$$

$$= (\|\cdot\|^* + \delta_C^*)(x)$$

se puede ver que

$$\rightarrow \|\cdot\|^*(x^*) = \delta_{B^*}(x^*)$$

$$\rightarrow \delta_C^*(x^*) = \sigma_C(x^*) = \sup_{x \in C} \langle x^*, x \rangle$$

entonces

$$\text{dist}_C(x) = \sup_{x^* \in B^*} \{ \langle x^*, x \rangle - \delta_{B^*}(x^*) - \sigma_C(x^*) \}$$

$$= \sup_{x^* \in B^*} \{ \langle x^*, x \rangle - \sup_{y \in C} \langle x^*, y \rangle \} \rightarrow \text{lo que poden probar!}$$

$$= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \inf_{y \in C} \{ \langle x, x-y \rangle \}$$

$$=: \varphi(x)$$

9

Para ver que el supremo es máximo, basta ver que $-\varphi$ es sci-débil ya que B^* es débilmente compacto. Esto se tiene ya que

$$-\varphi(x) = \sup_{y \in C} \{ \langle x, y-x \rangle \}$$

$$= \sup_{y \in C} \{ \langle x, y \rangle \} - \langle x, x \rangle$$

$\rightarrow$ ~~sci~~ fuertemente sci y convexo al ser supremo de funciones sci.

Entonces, por convexidad, $-\varphi$ es débilmente sci por lo que se tiene lo pedido $\square$.

(b) Describan los elementos de $\mathcal{D}(\text{dist}_C)(X) \quad \forall x \in X$.
sol: primero, hagamos $x \notin C$, de modo que sabemos que existe $\bar{x} \in C$ (denotado $\bar{x} = \text{proj}_C(x)$) tal que $\bar{x} \neq x$ y $\text{dist}_C(x) = \|x - \bar{x}\|$. Así, la inf-convolución es exacta con

$$\text{dist}_C(x) = \text{dist}_C(x - \bar{x} + \bar{x}) = (\|\cdot\| \square \delta_C)(x - \bar{x} + \bar{x})$$

$$= \|x - \bar{x}\| + \delta_C(\bar{x})^0.$$

Entonces

⑤

①

②

$$\partial(\text{dist}_C)(x) = \partial\|\cdot\|(x - \bar{x}) \cap \partial S_C(\bar{x})$$

① como $x = \bar{x}$, tenemos que $\|\cdot\|$ es diferenciable con

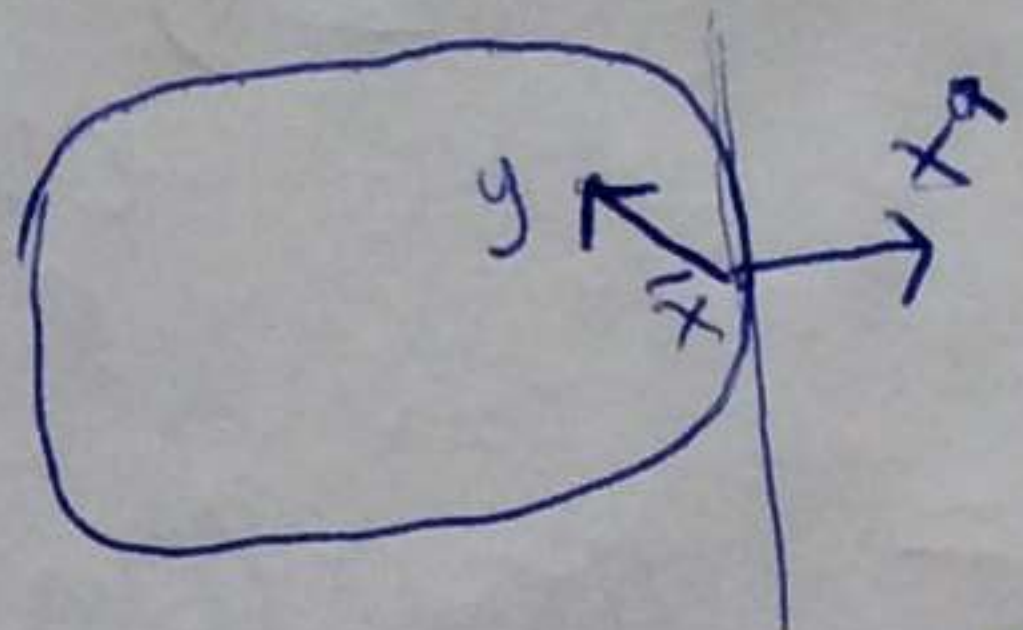
$$\partial\|\cdot\|(x - \bar{x}) = \left\{ \nabla\|\cdot\|(x - \bar{x}) \right\} = \left\{ \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|} \right\}$$

② por definición:

$$x^* \in \partial S_C(\bar{x}) \Leftrightarrow \forall y \in C: \langle x^*, y - \bar{x} \rangle + S_C(\bar{x}) \leq S_C(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in C: \langle x^*, y - \bar{x} \rangle \leq 0$$

$\hookrightarrow x^* \in N_C(\bar{x})$



Sumando ① y ②, tenemos que los elementos de $\partial(\text{dist}_C)(x)$ son únicamente $\frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|}$ en que $\bar{x}$ es el punto

$$\left\langle \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|}, y - \bar{x} \right\rangle \leq 0 \quad \forall y \in C.$$

Ahora, vemos el caso $x \in C$, la inf con la condición ⑥ es exacta con

$$\text{dist}_C(x) = \|0\| + S_C(x) = 0$$

de modo que

$$\partial(\text{dist}_C)(x) = \partial\|\cdot\|(0) \cap \mathcal{F}_C(x)$$

ya sabemos que $\partial S_C(x) = N_C(x)$,

Ahora, calculemos $\partial\|\cdot\|(0)$. Vemos que

$$x^* \in \partial\|\cdot\|(0) \Leftrightarrow \|0\| + \langle x^*, y - 0 \rangle \leq \|y\| \quad \forall y \in X$$

$$\Leftrightarrow \langle x^*, y \rangle \leq \|y\| \quad \forall y \in X$$

$$\Leftrightarrow \langle x^*, \frac{y}{\|y\|} \rangle \leq 1 \quad \forall y \in X$$

$$\Leftrightarrow \|x^*\| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in B^X$$

de modo que

$$\partial(\text{dist}_C)(x) = N_C(x) \cap B^X \quad \square.$$