

PL pruebe que

①

$$(f \square g)^* = f^* + g^*$$

em que $\square$ es la inf-convolución de $f, g: x \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
y la conjugada es tomada cr a la dualidad (x, y) .

Dem: para $y \in Y$,

$$(f \square g)^*(y) = \sup_{x \in X} \{ \langle y, x \rangle - (f \square g)(x) \}$$

$$= \sup_{x \in X} \{ \langle y, x \rangle - \inf_{z \in X} \{ f(z) + g(x-z) \} \}$$

$$= \sup_{x \in X} \{ \langle y, x \rangle + \sup_{z \in X} \{ -f(z) - g(x-z) \} \}$$

$$= \sup_{x \in X} \sup_{z \in X} \{ \langle y, x \rangle - f(z) - g(x-z) \}$$

$$= \sup_{z \in X} \{ \sup_{x \in X} \{ \langle y, x-z \rangle - g(x-z) \} + \langle y, z \rangle - f(z) \}$$

$$= \sup_{z \in X} \{ \underbrace{\sup_{\hat{x} \in X} \{ \langle y, \hat{x} \rangle - g(\hat{x}) \}}_{g^*(y)} + \langle y, z \rangle - f(z) \}$$

$$= f^*(y) + g^*(y) \quad \square.$$

P2 pruebe la proposición 23.1 del apunte:

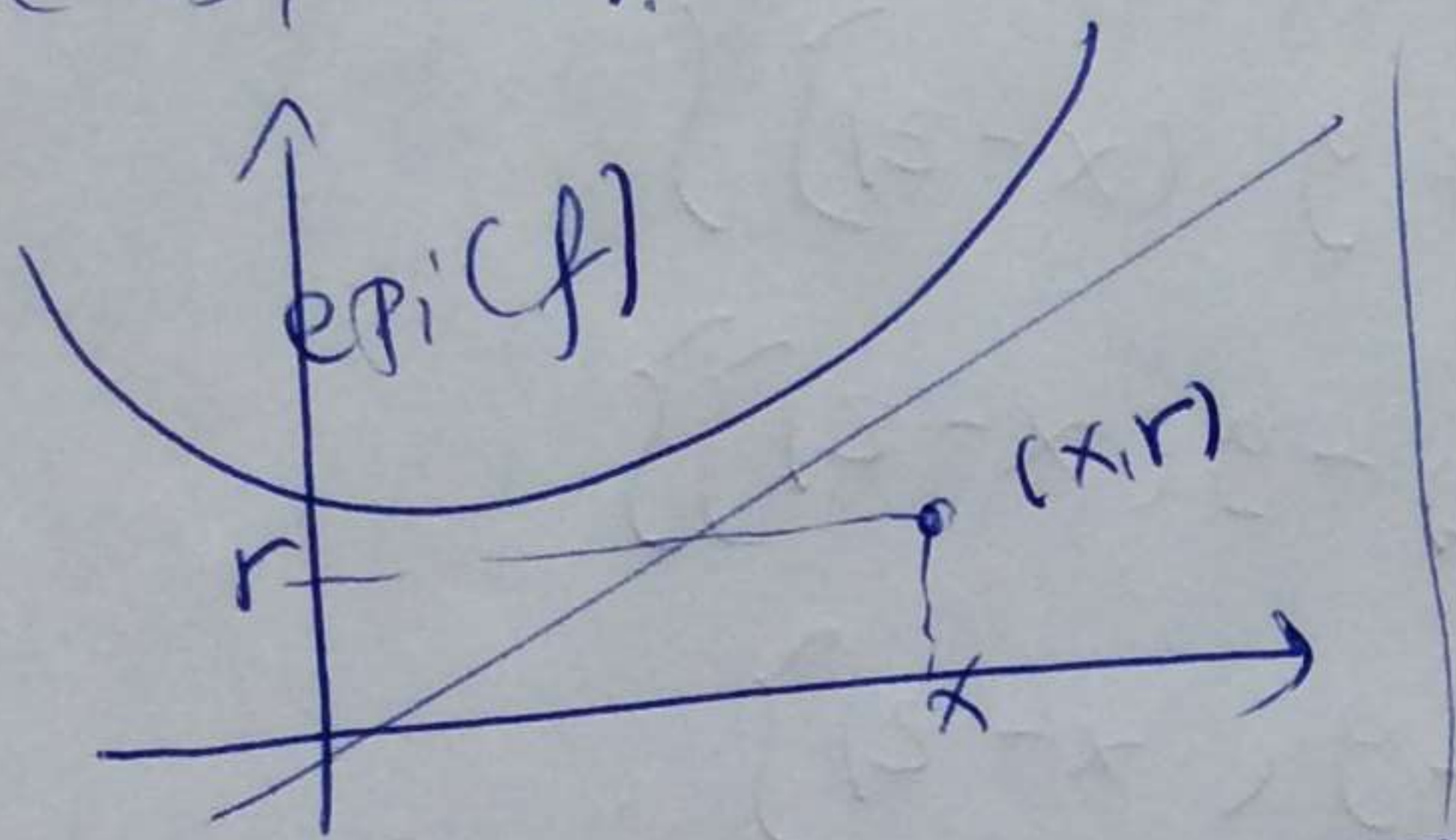
②

$f \in \Gamma_0(X) \Leftrightarrow f$ convexa ser propia.

Dem: $\Rightarrow$ ya lo vimos

$\Leftarrow$ f convexa ser propia

$\Rightarrow$ $\text{epi}(f)$ convexo cerrado no vacío (ni todo el espacio). Sea entonces $(x, r) \notin \text{epi}(f)$. Por HB,



existe $(y, s) \in Y \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$\forall (z, \tau) \in \text{epi}(f) :$

$$\langle y, x \rangle + sr < \lambda \leq \langle y, z \rangle + s\tau \quad (1)$$

Necesariamente $s > 0$. ~~veremos que~~

Debemos probar que $\forall x \in X, r < f(x), \exists \ell \in (x, \tau)^*$:

$$(f \geq \ell) \text{ y } (f(x) > \ell(x) > r).$$

$$1. x \in \text{dom}(f), \Rightarrow \lambda \in f(x).$$

$$\langle y, x \rangle + sr < \lambda \leq \langle y, x \rangle + sf(x)$$

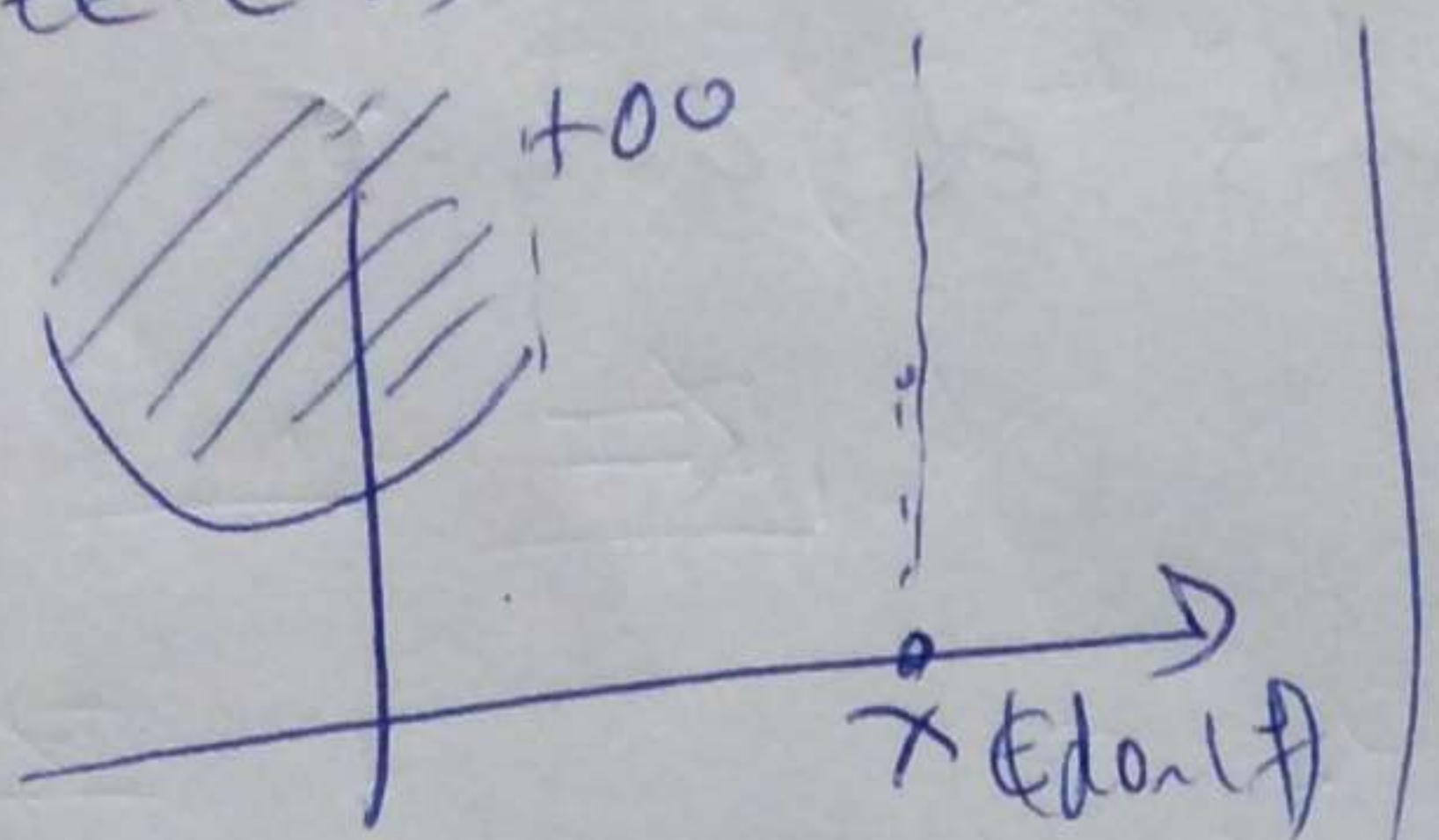
$$\Rightarrow s(f(x) - r) > 0 \Rightarrow s > 0 \quad | \text{ (1) } / s$$

$$\Rightarrow \langle \frac{y}{s}, x \rangle + r < \frac{\lambda}{s} \leq \langle \frac{y}{s}, z \rangle + f(z)$$

Podemos definir $\ell(z) = \langle \frac{y}{s}, z \rangle + \frac{\lambda}{s}$ De ese modo,

$$f \geq \ell \text{ y } f(x) > \ell(x) > r. \quad \checkmark$$

2. $x \notin \text{dom } f$. si $s > 0$, estamos bien, pero si $s = 0$, ③
tenemos un hiperplano vertical:



$\rightarrow \forall (z, \lambda) \in \text{epi}(f)$,

(1) con $s \equiv 0$

$$\langle y, x \rangle < \alpha \leq \langle y, z \rangle$$

De todos lados, existe $l \in (X, \mathbb{R})^*$ tal que

$$\forall z \in X: f(z) \geq l(z)$$

De modo que

$$\forall z \in X: f(z) \geq l(z) \geq \frac{l(z) + k(\alpha - \langle y, z \rangle)}{1} \rightarrow \infty \text{ (si } k \rightarrow \infty)$$

De modo que $f(x) \geq l(z) > r$ para todo $r \in \mathbb{R}$. $\square$

Dado para $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, se define la biconjugada $f^{**}: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

Por $f^{**}(x) = \sup_{y \in Y} \{ \langle y, x \rangle - f^*(y) \}$

señalamos que $f^{**} \in \Gamma(X)$ y $f^{**} \leq f$ por Y-F.

Prop: (clase del martes) para $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, se tiene que

$$f^{**}(x) = \sup \{ g(x) \mid g \in \Gamma(X), g \leq f \}$$

en particular,

$$f \in \Gamma(X) \Leftrightarrow f = f^{**}$$

P3) sea H espacio de Hilbert en dimensión con si mismo. ④

a) para $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$, pruebe que $f = f^*$.

Dem:

$$\begin{aligned}
 f^*(y) &= \sup_{x \in H} \{ \langle y, x \rangle - f(x) \} \\
 &= \sup_{x \in H} \left\{ \langle y, x \rangle - \frac{1}{2} \langle x, x \rangle \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sup_{x \in H} \{ 2\langle y, x \rangle - \langle x, x \rangle \} \\
 &= \frac{1}{2} \langle y, y \rangle + \frac{1}{2} \sup_{x \in H} \{ -(\langle y, y \rangle - 2\langle y, x \rangle + \langle x, x \rangle) \} \\
 &= \frac{1}{2} \langle y, y \rangle + \frac{1}{2} \sup_{x \in H} \{ -\|y - x\|^2 \} \\
 &= \frac{1}{2} \langle y, y \rangle - \frac{1}{2} \inf_{x \in H} \{ \|y - x\|^2 \} \rightarrow 0 \\
 &= \frac{1}{2} \langle y, y \rangle \quad \square.
 \end{aligned}$$

b) muestre que si $f \in \Gamma_0(H)$ con $f = f^*$, entonces $f = \frac{1}{2} \|\cdot\|^2$.

Dem: sabemos que para todo $x \in H$

$$f^*(y) \geq \langle x, y \rangle - f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) + f^*(y) \geq \langle x, y \rangle$$

$| x=y \quad + \text{Hölder's}$

$$\Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{2} \langle x, x \rangle = \frac{1}{2} \|x\|^2$$

$$\Rightarrow f^*(y) \leq \left(\frac{1}{2} \|x\|^2 \right)^* = \frac{1}{2} \|y\|^2$$

$f(y) =$ Eso concluye lo pedido $\square$.