MA5801 Análisis Convexo y Dualidad
Profesor: Alejandro Jofré C.
Auxiliar: Manuel Torres V.
Fecha de entrega: 3 de Diciembre, 2023

Enunciado Tarea - Dualidad en Optimización Convexa

Siga las instrucciones del pie de página.[1]

P1.- *Dualidad de Fenchel-Rockafellar en el espacio $C(K;\mathbb{R})$:* Sea X un espacio de Banach en dualidad con X^*, su dual analítico.

a) Calcule $(\|\cdot\|)^*$ y demuestre que para $x \in X \setminus \{0\}$ se tiene que

$$\partial(\|\cdot\|)(x) = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1,\ \langle x^*, x\rangle = \|x\|\}.$$

En lo que sigue, sea K un espacio topológico Hausdorff y compacto. Denotamos por $C(K;\mathbb{R})$ al conjunto de las funciones continuas de K en $\mathbb{R}$, dotado de la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Del curso de Teoría de la Medida[2] es sabido que el dual de $C(K;\mathbb{R})$ es isométricamente isomorfo al conjunto de las medidas de Borel regulares $\mu\colon \mathcal{B}(K) \to \mathbb{R}$, denotado $\mathcal{M}(K)$, dotado de la norma $\|\mu\| := |\mu|(K)$, donde

$$|\mu|(A) := \mu^+(A) + \mu^-(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(K).$$

El producto de dualidad entre $C(K;\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}(K)$ es dado por:

$$\langle \mu, f\rangle = \int_K f d\mu.$$

b) Una medida μ se dice concentrada en $A \in \mathcal{B}(K)$ si $|\mu|(K \setminus A) = 0$. Para $f \in C(K;\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ denotamos

$$K_f^+ := \{t \in K : f(t) = \|f\|_\infty\},$$
$$K_f^- := \{t \in K : f(t) = -\|f\|_\infty\}.$$

Demuestre que
$$\partial(\|\cdot\|_\infty)(f) = \{\mu \in \mathcal{M}(K) : \|\mu\| = 1,\ \mu^\pm \text{ está concentrada en } K_f^\pm\}.$$

c) Sean $f, \psi_1, \ldots, \psi_n \in C(K;\mathbb{R})$, suponiendo que $f \notin \mathrm{gen}(\{\psi_1, \ldots, \psi_n\})$, considere el problema (conocido como, el problema de mejor aproximación en el sentido de Chebyshev)

$$(P) \qquad \min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| f - \sum_{i=1}^n x_i\psi_i \right\|_\infty .$$

Calcule el dual de (P) asociado a la perturbación

$$\varphi(x, y) = \left\| f + y - \sum_{i=1}^n x_i\psi_i \right\|_\infty .$$

d) Demuestre que $v(P) + v(D) = 0$, y que además $S(D) \neq \emptyset$.

[1](1) La entrega de la tarea es individual, en un formato con letra legible. Se recomienda entregar el desarrollo en latex, pues se facilitará un template por U-cursos para redactar las respuestas. (2) Justifique o mencione cada paso a realizar en las demostraciones. Se considerará la redacción y calidad de escritura.

[2]Como referencia, puede revisar el apunte de Jaime San Martín, o el libro de Real Analysis de Gerard Folland.

e) Suponiendo que $\psi_1, \ldots, \psi_n$ son funciones linealmente independientes, demuestre que la aplicación $A\colon \mathcal{M}(K) \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$A(\mu) = \left(\int_K \psi_i d\mu \right)_{i=1}^n$$

es sobreyectiva. Deduzca además, que en este caso (P) admite soluciones

f) Explicite las relaciones de extremalidad que caracterizan las soluciones óptimas primal y dual.

P2.- *Aproximación de máxima entropía:* Sea $\overline{u} \in L^1([0,1];\mathbb{R})$ una función desconocida tal que $\overline{u}(x) \geq 0$ c.t.p. en $[0,1]$. Deseamos estimar $\overline{u}$ en base a sus $n+1$ primeros momentos $\int_0^1 x^i \overline{u}(x)dx = m_i > 0$, para $i = 0, 1, \ldots, n$. Para ello consideramos el problema

$$(P) \qquad \min_{u \in L^1([0,1];\mathbb{R})} \left\{ \int_0^1 E(u(x))dx : \int_0^1 x^i u(x)dx = m_i,\ i = 0, 1, \ldots, n \right\},$$

donde $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es (menos) la entropía de Boltzmann-Shannon, definida por $E(u) = u\ln(u)$, para $u \geq 0$, y $E(u) = +\infty$, para $u < 0$. El problema (P) equivale a

$$\min_{u \in L^1([0,1];\mathbb{R})} \{\Phi(u) : Au = m\},$$

con $\Phi\colon L^1([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $A\colon L^1([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ definidas por

$$\Phi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 E(u(x))dx & \text{si } E \circ u \in L^1([0,1];\mathbb{R}), \\ +\infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$(Au)_i = \int_0^1 x^i u(x)dx, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

a) Demuestre que $\Phi \in \Gamma_0(L^1([0,1];\mathbb{R}))$. *Indicación:* Utilice el Lema de Fatou.

b) Explicite el dual que se obtiene al perturbar la restricción de (P) mediante $Au = m - y$. Para ello pruebe que $A^*\colon \mathbb{R}^{n+1} \to L^\infty([0,1];\mathbb{R})$ es dada por $(A^*\lambda)(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n$, mientras que para todo $u^* \in L^\infty([0,1];\mathbb{R})$ se tiene que $\Phi^*(u^*) = \int_0^1 \exp(u^*(x) - 1)dx$.

c) Demuestre que (P) posee una única solución. *Indicación:* Aplique el Teorema de Dualidad visto en el capítulo 3 del curso.

d) Demuestre que si λ es una solución dual, entonces la solución de (P) es

$$u(x) = \exp\left(-1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i\right).$$

P3.- *Aplicación en dinámica:* Sea X un e.v.n. y X^* su dual. Dado un s.e.v. $M \subseteq X$, denotamos por $M^\perp$ el conjunto de los $x^* \in X^*$ tales que $\langle x^*, x\rangle = 0$ para todo $x \in M$. Se dice además, que un funcional $x^* \in X^*$ se dice alineado con un vector $x \in X$ si $\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|$. Dado $z^* \in X^*$, es cierto que

$$\inf_{x^* \in M^\perp} \|x^* - z^*\| = \sup_{x \in M,\ \|x\| \leq 1} \langle z^*, x\rangle,$$

y que el mínimo es alcanzado en algún $x_0^* \in M^\perp$. Además, que $x_0 \in M$ alcanza el supremo si, y sólo si $z^* - x_0^*$ está alineado con x_0, estas últimas afirmaciones puede utilizarlas, no las demuestre.

a) Sea $D = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x_i \rangle = a_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ con $x_1, \ldots, x_n \in X$, y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ dados. Suponga que D es no vacío, demuestre que

$$\min_{x^* \in D} \|x^*\|_* = \max_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i y_i : \left\| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right\| \leq 1 \right\},$$

y que el elemento x^* óptimo está alineado con $\sum_{i=1}^n x_i y_i$, donde y alcanza el máximo.

b) Se desea calcular el flujo de combustible $u(\cdot)$ (que es una función, en algún espacio de funciones que se detallará más adelante) para un cohete en ascenso vertical hasta alcanzar una altura h en tiempo T, minimizando el consumo, dado por $\int_0^T |u(t)|dt$. La altura $x(t)$ satisface que

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= u(t) - g, \\ x(0) &= \dot{x}(0) = 0, \end{aligned}$$

de modo que integrando por partes el problema se puede plantear como:

$$(CO) \qquad \min_u \left\{ \int_0^T |u(t)|dt : \int_0^T (T-t)u(t)dt = h + \frac{1}{2}gT^2 \right\}.$$

Si bien el problema se formula naturalmente en $L^1([0,T];\mathbb{R})$, este espacio no es reflexivo ni tampoco el dual de un espacio conocido, de modo que no es posible garantizar la existencia de mínimos. Relajando el problema identificando las funciones de variación acotada $v\colon [0,T] \to \mathbb{R}$, continuas por la derecha, tal que $v(a) = 0$. Este espacio, denotado por $\mathrm{NBV}([0,T];\mathbb{R})$ se identifica con el dual de $C([0,T];\mathbb{R})$ mediante el pareo de dualidad

$$\langle x, v \rangle = \int_a^b x(t)dv(t),$$

e incluye a $L^1([0,T];\mathbb{R})$ a través de la identificación

$$dv(t) = u(t)dt.$$

La norma dual viene dada por la variación total:

$$\|v\|_* := \int_0^T |dv(t)|,$$

de modo que el problema relajado resulta ser

$$\alpha := \min_{v \in \mathrm{NBV}([0,T];\mathbb{R})} \left\{ \int_0^T |dv(t)| : \int_0^T (T-t)dv(t) = h + \frac{1}{2}gT^2 \right\}.$$

Usando la parte (a), demuestre que este último mínimo es alcanzado y que

$$\alpha = \max_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{y}{2}(2h + gT^2) : \|(T-t)y\|_\infty \leq 1 \right\} = \frac{1}{2T}(2h + gT^2).$$

c) Demuestre que $v \in \mathrm{NBV}([0,T];\mathbb{R})$ está alineada con $x \in C([0,T];\mathbb{R})$ si, y sólo si v varía solamente en el conjunto Γ, de puntos $t \in [0,T]$ tales que $|x(t)| = \|x\|_\infty$, con $v(t)$ una función no decreciente si $x(t) > 0$, y no creciente si $x(t) < 0$. Deduzca que si Γ es finito, entonces un funcional alineado v es constante por pedazos con un número finito de discontinuidades de salto.

d) Deduzca que el óptimo v de la parte (b) solo puede variar en $t = 0$, de modo que v es una función escalón y $u = dv$ es una función que impulsa el cohete en $t = 0$. Determine el valor de T de modo que minimice α, y encuentre v correspondiente.