MA5801 Análisis Convexo y Dualidad
Profesor: Alejandro Jofré C.
Auxiliar: Manuel Torres V.
Fecha: Jueves 19 de Octubre, 2023

Enunciado Control

Duración: $3:00$ hrs.

P1.- *a*) Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $f\colon E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función convexa y propia. Demuestre que los conjuntos de subnivel de f son acotados si, y sólo si f^* es continua en el origen, es decir, $f^*(0) < +\infty$.

b) Sean E un espacio de Banach, K un espacio de Hausdorff compacto y $f\colon E \times K \to \mathbb{R}$ una función convexa, s.c.i. respecto a $x \in E$, y continua respecto a $y \in K$. Considere la función convexa s.c.i.:

$$f_K(x) := \max_{y\in K} f(x,y).$$

Además sea $K(x) := \{y \in K : f(x,y) = f_K(x)\}$.

1) Demuestre que
$$\partial f_K(x) = \overline{\text{co}}\{\partial f(x,y) : y \in K(x)\}.$$

2) Muestre que f_K es diferenciable sobre x ssi $K(x)$ es un singleton. *Indicación:* Primero muestre sin hipótesis de compacidad que $\partial f(x,y) \subseteq \partial f_K(x)$ cuando $y \in K(x)$. Entonces, muestre que $Df_K(x;d) \leq \sup_{y\in K(x)} Df((x,y);d)$, para todo $d \in X$. Luego aplique algún teorema de separación.

P2.- Sean X un espacio vectorial normado, $f\colon X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ y φ lineal afín tales que $f \geq \varphi$.

a) Demuestre que $\partial f(x) \subseteq \partial f^{**}(x)$, para todo $x \in X$.

b) Sea $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = f^{**}(x_0)$. Demuestre que $\partial f^{**}(x_0) \subseteq \partial f(x_0)$.

c) Concluya que si $\partial f(x) \neq \emptyset$, entonces $\partial f(x) = \partial f^{**}(x)$.

P3.- Sea $f \in \Gamma_0(X)$ con X un espacio de Banach. Para $\varepsilon > 0$ definimos el ε-subdiferencial de f en $x \in X$ como el conjunto de funcionales $x^* \in X^*$ tales que

$$f(y) \geq f(x) - \varepsilon + \langle x^*, y - x\rangle, \quad \forall y \in X,$$

a este conjunto lo denotamos por $\partial_\varepsilon f(x)$.

a) Demuestre que $\partial_\varepsilon f(x)$ es un conjunto convexo cerrado. Además demuestre que si $x \in \text{dom}(f)$, entonces $\partial_\varepsilon f(x)$ es no vacío.

b) Sea $x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$. Demuestre que existen $y \in X$ e $y^* \in \partial f(y)$ tales que $\|x - y\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ y $\|x^* - y^*\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

c) Demuestre que $\text{dom}(\partial f)$ es denso en $\text{dom}(f)$.

En lo que sigue, suponga que $\inf\{f(x) : x \in X\} = m > -\infty$ y sea $\varepsilon > 0$.

d) Demuestre que x es un ε-mínimo si, y sólo si, $0 \in \partial_\varepsilon f(x)$.

e) Deduzca la existencia de sucesiones $(y_k)_k$ en X e $(y_k^*)_k$ en X^* tales que $y_k^* \in \partial f(y_k)$, que satisfacen que $f(y_k) \to m$ y $\|y_k^*\| \to 0$.

f) Se dice que f satisface la *condición de Palais-Smale* si toda sucesión $(y_k)_k$ tal que $d_{\partial f(y_k)}(0) \to 0$ para $(f(y_k))_k$ acotada, es relativamente compacta para la topología débil. Deduzca que si f es acotada inferiormente y satisface la condición de Palais-Smale, entonces el mínimo de f es alcanzado.