

~~Problema 8~~

②

P1 (valor propio máximo)

Consideremos $(S^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el e.v. de las matrices simétricas con el producto interno

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$$

consideramos en este espacio la función $\lambda_{\max}: S^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda_{\max}(A)$ es el mayor valor propio de la matriz A . Pruebe que esta función es convexa.

Dem. veremos primero que

$$\lambda_{\max}(A) = \sup_{\|V\|=1} \{V^T A V\}$$

Para esto, notamos que el supremo se alcanza al ser $V \mapsto V^T A V$ una función continua definida sobre un conjunto compacto. Definamos entonces $a = \max_{\|V\|=1} \{V^T A V\}$ y sea $V_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$a = V_0^T A V_0$. Si definimos $P = aI - A$, vemos que esta matriz es ≥ 0 ya que para $V \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} V^T P V &= V^T (aI - A) V = a\|V\|^2 - V^T A V \\ &= \|V\|^2 \left(a - \left(\frac{V}{\|V\|} \right)^T A \left(\frac{V}{\|V\|} \right) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

entonces, $P \geq 0$ con $V_0^T P V_0 = 0$.

claim: $P V_0 = 0$.

esto es porque considerando el vector $P V_0 + t V_0$, tenemos

$$(P V_0 + t V_0)^T P (P V_0 + t V_0)$$

$$= (P V_0 + t V_0)^T (P^2 V_0 + t P V_0) = V_0^T P^3 V_0 + 2t V_0^T P^2 V_0 + t^2 V_0^T P V_0 \rightarrow 0.$$

$$= V_0^T P^3 V_0 + 2t \|P V_0\|^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

ya que $P \geq 0$.

$$\Rightarrow \|P V_0\|^2 = 0 \Rightarrow P V_0 = 0. \quad \checkmark$$

Entonces

$$P V_0 = (aI - A) V_0 = 0 \Rightarrow A V_0 = a V_0$$

$\Rightarrow V_0$ es vector propio de A con v.p. asociado

$$a = \max_{\|V\|=1} \{V^T A V\}.$$

y es el mayor valor propio ya que si λ es otro v.p. de A con vector propio asociado X (ppg unitario)

Entonces $A X = \lambda X \quad / \quad X^T(\cdot)$

$$\Rightarrow X^T A X = \lambda \|X\|^2 \leq a \quad \text{de modo que } \lambda \leq a$$

con esto, probamos que la función es convexa ya que para $A, B \in S^n$, $\alpha \in [0, 1]$,

$$\lambda_{\max} (\alpha A + (1-\alpha)B)$$

$$= \max_{\|V\|=1} \{V^T (\alpha A + (1-\alpha)B) V\}$$

$$\leq \max_{\|V\|=1} \{\alpha V^T A V\} + \max_{\|V\|=1} \{(1-\alpha) V^T B V\}$$

$$= \alpha \lambda_{\max}(A) + (1-\alpha) \lambda_{\max}(B) \quad \square$$

P2] (quasi convexidad) sea X ev y $S \subset X$ convexo. ③
 Decimos que $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ es quasi convexa si

$$\forall x, y \in S, \lambda \in [0, 1]$$

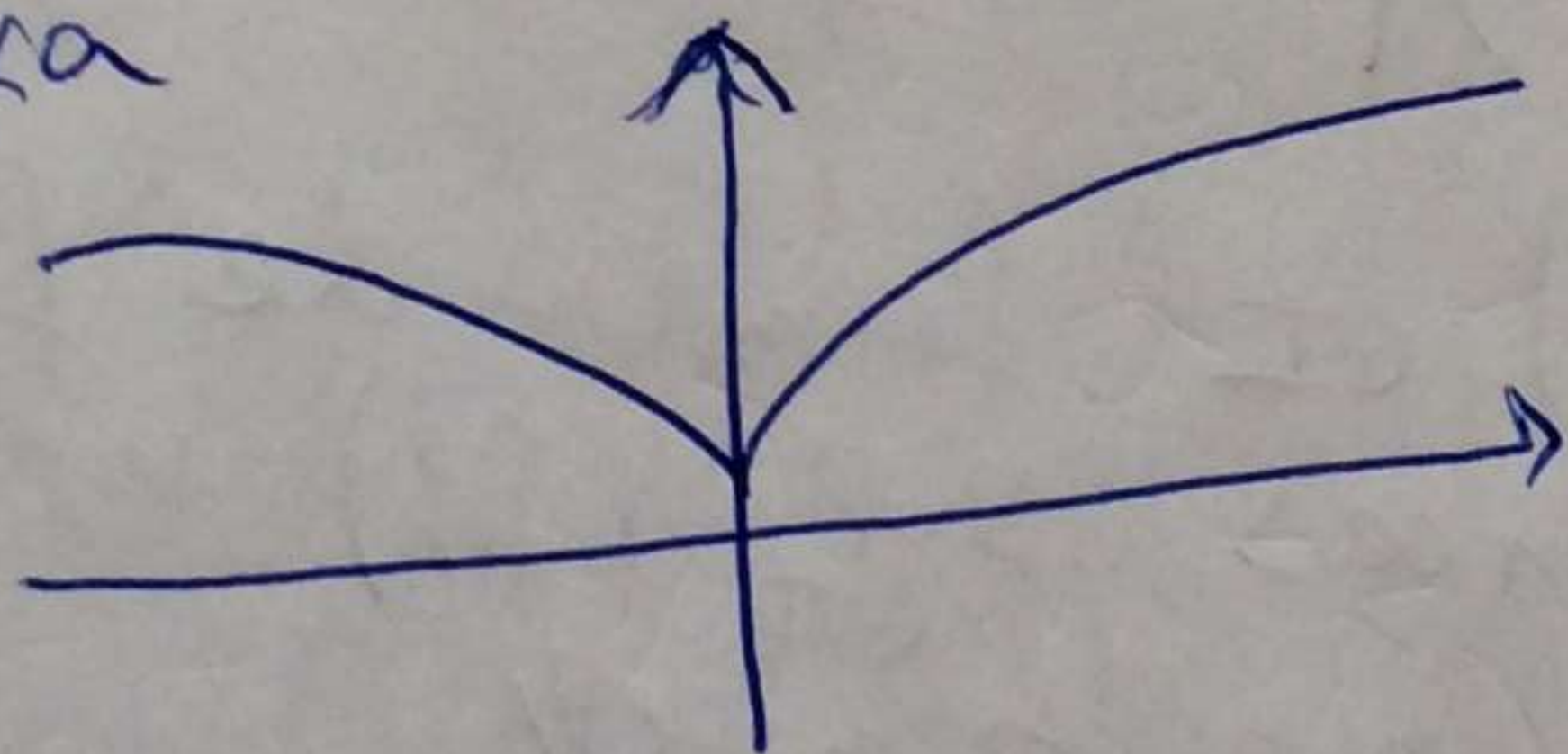
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max \{f(x), f(y)\}$$

a) pruebe que f convexa $\Rightarrow f$ quasi convexa.

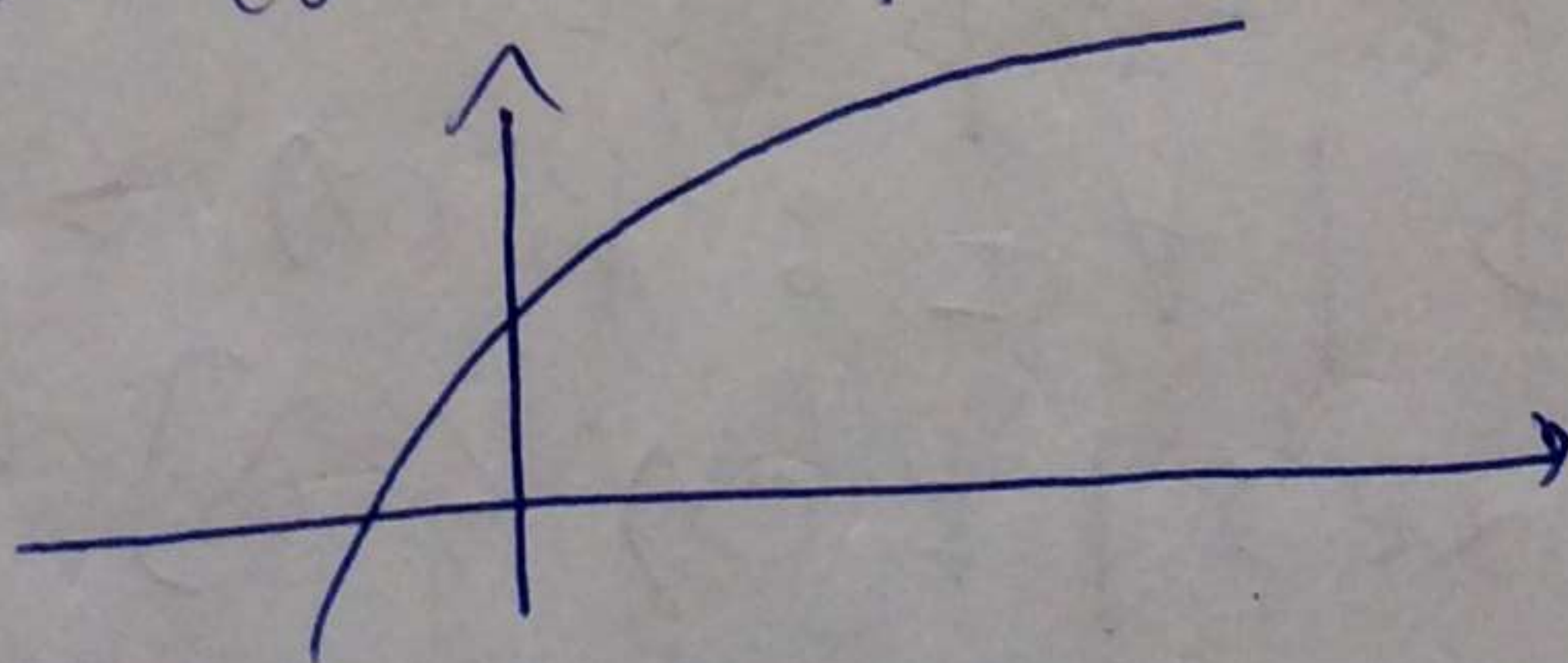
Dem: En adelante, denotemos $M = \max \{f(x), f(y)\}$.
 y veros que si f convexa y tomamos
 $x, y \in S, \lambda \in [0, 1]$ entonces

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ &\leq \lambda M + (1-\lambda)M = M. \quad \square \end{aligned}$$

b) En cuenta
 $\rightarrow$ Una funcion convexa que no sea
 quasi convexa



$\rightarrow$ Una funcion concava que sea quasi convexa



c) pruebe que f es convexa

(4)

$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \Gamma_\lambda(f)$ convexo.

Dem: $\Rightarrow$ Sea f quasiconvexa y $x, y \in \Gamma_\lambda(f), \lambda \in [0, 1]$.

Entonces

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq M \leq \lambda$$

De modo que $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Gamma_\lambda(f) \rightarrow \Gamma_\lambda(f)$ convexo.

$\Leftarrow$ Sea f tal que $\Gamma_\lambda(f)$ son convexos y sea m

$x, y \in S, \lambda \in [0, 1]$, vemos que

$$x \in \Gamma_{f(x)}(f) \mid y \in \Gamma_{f(y)}(f)$$

$$\Rightarrow x, y \in \Gamma_m(f)$$

Al ser $\Gamma_m(f)$ convexo, $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Gamma_m(f)$

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq M \Rightarrow f$ quasiconvexa $\square$.

d) pruebe que si $(f_i)_{i \in I}$ familia de funciones quasiconvexas, entonces $\sup_{i \in I} (f_i)$ es quasiconv.

Dem: usemos los conjuntos de nivel

$$\Gamma_\lambda(\sup_{i \in I} f_i) = \{x \in S \mid (\sup_{i \in I} f_i)(x) \leq \lambda\}$$

$$= \{x \in S \mid \forall i \in I : f_i(x) \leq \lambda\}$$

$$= \bigcap_{i \in I} \{x \in S \mid f_i(x) \leq \lambda\}$$

$$= \bigcap_{i \in I} \Gamma_\lambda(f_i) \rightarrow \text{convexo por intersección de convexos} \quad \square.$$

P3] (inf - convolução)

(5)

a) (proposto) prove que se x em $\mathcal{X}$ e F é um conjunto convexo em $\mathcal{X} \times \bar{\mathbb{R}}$, entonces $f: \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ dada por

$$f(x) = \inf \{ m \mid (x, m) \in F \}$$

é uma função convexa.

Dem: proposta,

ver

Convex Analysis - Rockafellar
Pt 1 - sec 5

b) Dadas $f, g: \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ convexas, definimos

$$(f \square g)(x) = \inf \{ f(x_1) + g(x_2) \mid x = x_1 + x_2 \}$$

prove que $\text{dom}(f \square g) = \text{dom}(f) + \text{dom}(g)$.

Dem: $\supseteq$ $x \in \text{dom}(f) + \text{dom}(g)$

$\Rightarrow \exists x_1 \in \text{dom}(f), x_2 \in \text{dom}(g): x = x_1 + x_2$

ou seja $f(x_1) + g(x_2) < \infty \Rightarrow (f \square g)(x) < \infty$.

$\Rightarrow x \in \text{dom}(f \square g)$.

$\subseteq$ se $x \notin \text{dom}(f) + \text{dom}(g)$,

$\Rightarrow x = x_1 + x_2$ com $x_1 \in \text{dom}(f) \Rightarrow x_2 \notin \text{dom}(g)$

$\Rightarrow g(x_2) = \infty$

por lo tanto $f(x_1) + g(x_2) = \infty$ para qualquer x_1, x_2 com $x_1 + x_2 = x$ $\square$.

c) pruebe que $f \square g$ convexa.

(6)

Dem: f, g convexas

$\rightarrow \text{epi}(f), \text{epi}(g)$ convexas

$\rightarrow \text{epi}(f) + \text{epi}(g)$ convexo

Por parte a),

$x \mapsto \inf \{ m \mid (x, m) \in \text{epi}(f) + \text{epi}(g) \}$

es convexa

$\Rightarrow x \mapsto \inf \{ m \mid \exists x_1, m_1 \in \text{epi}(f) : (x, m) = (x_1, m_1) + (x_2, m_2) \}$
 $x_2, m_2 \in \text{epi}(g)$

$\Rightarrow x \mapsto \inf \{ m_1 + m_2 \mid \begin{matrix} x = x_1 + x_2 \\ f(x_1) \leq m_1 \\ g(x_2) \leq m_2 \end{matrix} \}$

$= \inf \{ f(x_1) + g(x_2) \mid x = x_1 + x_2 \}$

que es precisamente $f \square g$ $\square$

d) pruebe que si C es un conjunto convexo, entonces $d(\cdot, C)$ es una función convexa.

Dem: si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \|x\|$ y $g: x \rightarrow \mathbb{R}$ por $g = \delta_C$. Entonces ambas son convexas y ~~por lo~~ por lo tanto

$(f \square g)(x) = \inf \{ f(x_1) + g(x_2) \mid x = x_1 + x_2 \}$
 $= \inf \{ f(y) + g(x-y) \mid y \in X \}$

$\hookrightarrow$ (convexa)

$$= \inf_{y \in X} \{ g(y) + f(x-y) \}$$

$$= \inf_{y \in X} \{ \delta_C(y) + \|x-y\| \}$$

$$= \inf_{y \in C} \{ \|x-y\| \} = d(x, C) \quad \square.$$