MA5801 Análisis Convexo y Dualidad
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Auxiliar 4

Funciones convexas
1 de septiembre de 2024

P1. (Valor propio máximo) Consideremos el espacio $(\mathcal{S}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de las matrices simétricas con el producto interno

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB)$$

Consideremos en este espacio la función $\lambda_{\max} : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\lambda_{\max}(A)$ es el mayor valor propio de la matriz A. Pruebe que esta función es convexa.

P2. (Cuasi-convexidad) Sea X espacio vectorial y $S \subseteq X$ convexo. Decimos que $f : S \to \mathbb{R}$ es cuasiconvexa si

$$\forall x, y \in S, \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

a) Pruebe que si f es convexa, entonces f es cuasiconvexa.

b) Encuentre
- Una función cuasiconvexa que no sea convexa.
- Una función cóncava que sea cuasiconvexa.

c) Pruebe que f es cuasiconvexa ssi $\forall\lambda \in \mathbb{R} : \Gamma_\lambda(f)$ es convexo.

d) Pruebe que si $(f_i)_{i\in I}$ es una familia de funciones cuasiconvexas, entonces $\sup_{i\in I} f_i$ es cuasiconvexa.

P3. (Inf-convolución) Sea X evn.

a) **(Propuesto)** Pruebe que si $F \subseteq X \times \overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto convexo, entonces $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$f(x) = \inf\{\mu : (x, \mu) \in F\}$$

Es una función convexa.

b) Dadas $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ convexas, definimos

$$(f \square g)(x) = \inf\{f(x_1) + g(x_2) : x = x_1 + x_2\}$$

Pruebe que $\operatorname{dom}(f \square g) = \operatorname{dom}(f) + \operatorname{dom}(g)$.

c) Pruebe que $f \square g$ convexa.

d) Pruebe que si $C \subseteq X$ es un conjunto convexo, entonces $d(\cdot, C)$ es una función convexa.