AUX #3: principio variacional de Ekeland

Recordemos el teorema anterior d PVE:

Teo (1.2.3)

Sea (X,d) em completo y $f: X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ propia sci acotada inferiormente. Entonces, para $\varepsilon > 0$, $x_0 \in dom(f)$, existe $\bar{x}$ tq que

(i) $f(\bar{x}) + \varepsilon d(x_0, \bar{x}) \leq f(x_0)$

(ii) $\forall x \neq \bar{x}$: $f(\bar{x}) \leq f(x) + \varepsilon d(x, \bar{x})$

(con igualdad en $x = \bar{x}$)

Una buena interpretación de esto es que si $x_0 \in \varepsilon\text{-argmin}(f)$, entonces

$$d(x_0, \bar{x}) \leq \frac{f(x_0) - f(\bar{x})}{\varepsilon} \leq \frac{f(x_0) - \inf(f)}{\varepsilon} \leq 1.$$

De modo que queda:

"para $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in \varepsilon\text{-argmin}(f)$, existe $\bar{x}$ tq que

(i) $f(\bar{x}) + \varepsilon d(x_0, \bar{x}) \leq f(x_0)$

(ii) $d(x_0, \bar{x}) \leq 1$

(iii) $\forall x \neq \bar{x}$: $f(\bar{x}) < f(x) + \varepsilon d(x, \bar{x})$"

que es el PVE con $\lambda = 1$.

P1 Sea (X, d) em completo y $\varphi: X \to X$ k-contracción. Pruebe con PVE que φ tiene único punto fijo:

<u>Dem</u>: Sea $f: X \to \mathbb{R}$ por $f(x) = d(x, \varphi(x))$.
Dado $\varepsilon > 0$ (y x_0 que no usamos), sabemos que existe $\bar{x} \in X$ tal que

$$\forall x \in X: f(\bar{x}) \leq f(x) + \varepsilon d(x, \bar{x})$$

$$\Rightarrow d(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \leq d(x, \varphi(x)) + \varepsilon d(x, \bar{x})$$

con $x = \varphi(\bar{x})$, tenemos

$$d(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \leq d(\varphi(\bar{x}), \varphi^2(\bar{x})) + \varepsilon d(\varphi(\bar{x}), \bar{x})$$

$$\leq k\, d(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) + \varepsilon d(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$$

$$\Rightarrow d(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \leq (k + \varepsilon) d(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$$

como $k < 1$, tomo $\varepsilon \in (0, 1-k)$ y obtengo

$$d(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \leq L\, d(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \quad (L < 1)$$

$$\Rightarrow (1-L)\, d(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \leq 0 \quad \cdot \frac{1}{1-L} > 0$$

$$\Rightarrow d(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0 \Rightarrow \bar{x} \text{ punto fijo}$$

$\square$

P2 Para ~~xxxx~~ X (em completo) y $\varphi: X \to X$, ③
decimos que φ es k-contracción direccional si
(i) φ continua
(ii) ~~existe~~ $\forall x \in X$ con $\varphi(x) \neq x$, existe $z \in [x, \varphi(x)] \setminus \{x\}$ td que

$$d(\varphi(x), \varphi(z)) \leq k\, d(x, z)$$

en que definimos el segmento por

$$[x, y] = \{ z \in X \mid d(x, z) + d(z, y) = d(x, y) \}.$$

Teo: Sea (X, d) em completo y suponga que $\varphi: X \to X$ es contracción direccional. pruebe que φ admite un punto fijo.

Dem: Definimos $f: X \to \mathbb{R}$ por $f(x) = d(x, \varphi(x))$.
Dado $\varepsilon > 0$, existe $\bar{x} \in X$ td que

$$\forall x \in X: f(\bar{x}) \leq f(x) + \varepsilon\, d(x, \bar{x}) \qquad (1)$$

si $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$, listo. si no, por ser φ contracción direccional, existe $z \neq \bar{x}$ td que

$$d(\varphi(z), \varphi(\bar{x})) \leq k\, d(z, \bar{x}) \qquad (2)$$

$$d(\bar{x}, z) + d(z, \varphi(\bar{x})) = d(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \qquad (3)$$

Por (1): $d(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \leq d(x, \varphi(x)) + \varepsilon\, d(x, \bar{x})$

Haciendo $x = z$,

$$d(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \underset{(3)}{\leq} d(z, \varphi(z)) + \varepsilon\, d(z, \bar{x})$$

$$d(\bar{x}, z) + \cancel{d(z, \varphi(\bar{x}))} \leq d(z, \varphi(z)) + \varepsilon\, d(z, \bar{x})$$

$$\leq d(\varphi(z), \varphi(\bar{x})) + \cancel{d(\varphi(\bar{x}), z)}$$

$$\Rightarrow d(\bar{x}, z) \leq k\, d(\bar{x}, z) + \varepsilon\, d(\bar{x}, z)$$

$$\Rightarrow (1 - \varepsilon - k)\, d(\bar{x}, z) \leq 0 \quad \Big| \text{ Tomo } \varepsilon \in (0, 1-k)$$

$$\Rightarrow d(\bar{x}, z) = 0 \Rightarrow z = \bar{x} \quad * \quad \square.$$

Recordemos que por PVE, si V Banach y

$F: V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ propia sci y acotada inferiormente,

si además suponemos F Gâteaux-diferenciable,

entonces para cada $\varepsilon > 0$, $u \in \varepsilon\text{-argmin}(f)$ y

$\lambda > 0$, existe $v \in V$ td que

$$F(v) \leq F(u)$$

$$\|v - u\| \leq \lambda$$

$$\|F'(v)\|_* \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

P3| suponga además que existen $k > 0$, $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall v \in V: \ F(v) \geq k\|v\| + c$$

Entonces ~~pruebe~~ que la imagen $F'(V)$ es densa

en $\overline{B}(0, k) \subseteq V^*$.

Dem: sea $u^* \in V^*$ con $\|u^*\| \leq k$, basta probar que

para todo $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in V$ td que

$$\|F'(u_\varepsilon) - u^*\| \leq \varepsilon.$$

Para esto, consideramos $G: V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por

$$G(v) = F(v) - \langle v, u^* \rangle$$

es claro que G es Gâteaux-diferenciable con

$G'(v) = F'(v) - u^*$ y sci. Además es inferiormente

acotada ya que

$$\inf(G) = \inf_{v \in V} \{ F(v) - \langle v, u^* \rangle \}$$

$$\geq \inf_{v \in V} \{ k\|v\| - \langle v, u^* \rangle \} + C$$

$$\geq \inf_{v \in V} \{ k\|v\| - \|v\| \|u^*\|_* \} + C$$

$$= \inf_{v \in V} \{ \underbrace{(k - \|u^*\|_*)}_{+} \|v\| \} + C$$

$$\underbrace{=}_{\inf} C > -\infty$$ se obtiene con $(v=0)$.

(De modo que G acotada inferiormente).

Por corolario del PVE, $(\lambda = 1)$ existe entonces $u_\varepsilon \in V$ con $\|G'(u_\varepsilon)\|_* \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \|F'(u_\varepsilon) - u^*\| \leq \varepsilon$$

que es lo buscado $\square$.