MA5801 Análisis Convexo y Dualidad**Profesor:** Alejandro Jofré**Auxiliar:** Benjamín Vera Vera

Auxiliar 3

Principio Variacional de Ekeland

25 de agosto de 2024

P1. (Teorema de puntos fijos de Banach) Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\varphi : X \rightarrow X$ una k -contracción. Pruebe utilizando el PVE que φ tiene un único punto fijo.

P2. (Refinamiento de Clarke) Para (X, d) espacio métrico completo y $x, y \in X$, definimos el segmento que une x e y por:

$$[x, y] = \{z \in X : d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$$

Dado esto, si $\varphi : X \rightarrow X$ continua, decimos que φ es k -contracción direccional si para todo $x \in X$ con $\varphi(x) \neq x$, existe $z \in [x, \varphi(x)] \setminus \{x\}$ tal que

$$d(\varphi(x), \varphi(z)) \leq kd(x, z)$$

Pruebe que si φ es contracción direccional, entonces admite al menos un punto fijo.

P3. Sea V espacio de Banach y $F : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ función propia, sci, acotada inferiormente y Gâteaux diferenciable. Suponga además la siguiente condición de crecimiento: Existen $k > 0, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall v \in V : F(v) \geq k\|v\| + c$$

Pruebe que entonces el conjunto imagen $F'(V)$ es denso en $B(0, k) \subseteq V^*$.