

P1 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ boreliano y $U: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ ①
 función Borel-medible no negativa tal que para
 casi todo $t \in \Omega$, la función $U(t, \cdot)$ es sci.
 pruebe entonces que para $p \in [1, \infty)$, el funcional
 $\Phi_U: L^p(\Omega \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi_U(x) = \int_{\Omega} U(t, x(t)) \, \mu(dt)$$

es sci. A este funcional le llamamos funcional
 de Nemitski asociado a U .

Dem: como L^p es metrizable, nos basta probar que
 siempre que $x_n \rightarrow x$ en L^p , se tiene que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi_U(x_n) \geq \Phi_U(x). \quad (I)$$

Sea entonces $x_n \rightarrow x$ en L^p y sea $\{x_{n_k}\}_k$
 una subsecuencia tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_U(x_{n_k}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi_U(x_n) \quad (1)$$

(esto existe ya que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi_U(x_n)$ es el menor
 punto de acumulación).

por ser subsecuencia, ~~se~~ tendremos que $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ en L^p .
 y por lo tanto (propiedad conocida para $p \geq 1$)
 existe una subsecuencia $\{x_{n_{k(i)}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $x_{n_{k(i)}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x$

de modo que ~~existam~~ sobre um conjunto de medida
muito:

$$x_{m(k)}(t) \longrightarrow x(t)$$

y d ser $u(t, \cdot)$ s.c.

$$\Rightarrow u(t, x(t)) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} u(t, x_{m(k(i))}(t)) \quad (2)$$

Entonces,

$$\Phi_m(x) \stackrel{(def)}{=} \int_{\Omega} u(t, x(t)) \, m(dt)$$

$$(2) \leq \int_{\Omega} \liminf_{i \rightarrow \infty} u(t, x_{m(k(i))}(t)) \, m(dt)$$

$$(Fatou) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(t, x_{m(k(i))}(t)) \, m(dt)$$

$$(def) = \liminf_{i \rightarrow \infty} \Phi_m(x_{m(k(i))})$$

$$(\text{conv}_{CS}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_m(x_{m(k)})$$

$$(2) = \liminf_{m \rightarrow \infty} \Phi_m(x_m)$$

6.0 Φ_m es s.c. $\square$

P2 Sean $T \in (0, \infty)$ y $f: [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (3)

$g: [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dos funciones que cumplen:

(i) f, g Borel-medibles en $[0, T] \times \mathbb{R}^m$

(ii) $\forall t \in [0, T]: f(t, \cdot), g(t, \cdot)$ son s.c.i

(iii) Existe $C \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ y $d, p \in \mathbb{R}$ tales que $d > 0, p > 1$ y $\forall t \in [0, T], w, z \in \mathbb{R}^m$:

$$f(t, z) + g(t, w) \geq C(t) + d \|w\|^p$$

(iv) $\forall t \in [0, T]: g(t, \cdot)$ es convexa

(v) existe $\hat{u} \in L^p([0, T], \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\int_0^T |g(s, \hat{u}(s))| ds < \infty \quad \Bigg| \quad \int_0^T |f(s, \hat{x}(s))| ds < \infty$$

en que $\hat{x}(t) := x_0 + \int_0^t \hat{u}(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$.

pruebe entonces que el problema de cálculo de variaciones

$$\inf_x \left\{ \int_0^T f(t, x(t)) + g(t, \dot{x}(t)) dt \right\}$$

s.c.

$$x(0) = x_0$$

tiene al menos una solución.

Dem: el problema puede ser visto como uno sobre $\dot{x}$ del siguiente modo:

(4)

$$\inf_{\dot{x} \in L^p([0,T], \mathbb{R}^n)} \left\{ \int_0^T f(t, P(\dot{x})(t)) dt + g(t, \dot{x}(t)) dt \right\}$$

Donde $P(\cdot)$ se define por

$$P(\dot{x})(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(s) ds$$

De este modo, basta probar que el funcional

$$\dot{x} \mapsto F(\dot{x}) = \int_0^T f(t, P(\dot{x})(t)) dt + g(t, \dot{x}(t)) dt$$

es sci e inf-compacto con respecto a una topología adecuada. Por (v), obtenemos $F(\hat{u}) < \infty$ de modo que $F \not\equiv +\infty$.

inf-compactidad consideremos el conjunto

$$\Gamma_C(F) = \{ \dot{x} \in L^p([0,T], \mathbb{R}^n) \mid F(\dot{x}) \leq C \}$$

veremos que

$$C \geq F(\dot{x}) = \int_0^T f(t, P(\dot{x})(t)) + g(t, \dot{x}(t)) dt$$

$$(iv) \int_0^T c(t) + d \|\dot{x}(t)\|^p dt = \underbrace{\int_0^T c(t) dt}_{=a} + d \|\dot{x}\|_p^p$$

$$\Rightarrow \|\dot{x}\|_p \leq \left(\frac{C-a}{d} \right)^{1/p}$$

De modo que $T_c(F) \in B(0, (\frac{\epsilon}{2})^{1/p})$ ⑤

Por lo que $T_c(F)$ es acotado en L^p y luego débilmente compacto (ya que L^p es Banach reflexivo).

Sci (Habrá que chequear esto para la topología débil).

Vemos que el funcional F es una suma. Por lo que basta probar la Sci para cada término por separado.

$$\textcircled{1} \quad \dot{x} \mapsto \int_0^T f(t, P(\dot{x})(t)) dt$$

suponga $\dot{x}_n \rightarrow \dot{x}$ en L^p . Entonces

$$P(\dot{x}_n^i)(t) = x_0^i + \int_0^t \dot{x}_n^i(s) ds$$

$$= x_0^i + \int_0^t \dot{x}_n(s) \cdot I_{[0,t]}^i(s) ds$$

$$\left(\text{definiendo } I_{[0,t]}^i(s) = \begin{cases} e^i, & s \in [0, t] \\ 0 & \sim \end{cases} \right)$$

$$= x_0^i + \left\langle \underbrace{\dot{x}_n}_{L^p}, \underbrace{I_{[0,t]}^i}_{L^q} \right\rangle$$

$$\rightarrow x_0^i + \left\langle \dot{x}, I_{[0,t]}^i \right\rangle = P(\dot{x})(t)$$

Por lo que $P(\dot{x}_n) \rightarrow P(\dot{x})$ puntualmente. Así,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f(t, \dot{x}_n(t)) dt$$

(6)

$$\geq \int_0^T \liminf_{n \rightarrow \infty} f(t, \dot{x}_n(t)) dt$$

$$\geq \int_0^T f(t, \dot{x}(t)) dt \quad \checkmark$$

(f. ser)

Para ver la otra parte, definimos $G: L^p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Por:

$$G(\dot{x}) = \int_0^T g(t, \dot{x}(t)) dt$$

Por (iii) y dedo $\hat{x}$ el dedo por (iv),

$$g(t, w) \geq -f(t, \hat{x}(t)) + c(t) + d \|w\|^p$$

De modo que si definimos

$$h(t, w) = -f(t, \hat{x}(t)) + c(t) + d \|w\|^p$$

tenemos que $h(t, v(\cdot))$ es integrable (por def)

siempre que $v \in L^p([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Hay que verificar que G está bien definida en el sentido de que realmente no toma valores $-\infty$. Pero esto se cumple ya que si g, h denotan las partes positivas de g, h respectivamente, entonces

$$g \geq h \Rightarrow g' \leq h' \quad \text{por lo que}$$

(7)

$$\int_0^T g^-(t, \dot{x}(t)) dt \leq \int_0^T h^+(t, \dot{x}(t)) dt < \infty \quad (\text{por integrabilidad})$$

De modo que G está bien definida.

Definamos $\Phi: L^p \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ por

$$\Phi(v) = \int_0^T (g-h)(t, v(t)) dt$$

(el funcional de Nemitski asociado a $g-h \geq 0$)

Al ser g sci, $g-h$ también lo es

ya que $h(t, \cdot)$ continua.

Entonces, por P2, Φ es sci con respecto a

la topología fuerte de L^p .

Esto significa que si $\dot{x}_n \rightarrow \dot{x}$ en L^p , entonces

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(\dot{x}_n) \geq \Phi(\dot{x})$$

$$\Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^T g(t, \dot{x}_n(t)) dt + \int_0^T h(t, \dot{x}(t)) dt - \alpha \|\dot{x}_n\|_p^p \right\}$$

$$\geq \int_0^T g(t, \dot{x}(t)) dt + \int_0^T h(t, \dot{x}(t)) dt - \alpha \|\dot{x}\|_p^p$$

$$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \{ G(\dot{x}_n) - d \|\dot{x}_n\|_P^p \}$$

$$\geq G(\dot{x}) - d \|\dot{x}\|_P^p$$

pero ya que $\|\dot{x}_n\|_P \rightarrow \|\dot{x}\|_P$, se tiene

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} G(\dot{x}_n) \geq G(\dot{x})$$

Por lo que G es sci fuerte.

Ahora, veamos que si $V_1, V_2 \in L^p([0, T], \mathbb{R}^m)$, $\lambda \in [0, 1]$, entonces

$$G(\lambda V_1 + (1-\lambda)V_2) = \int_0^T g(t, \lambda V_1(t) + (1-\lambda)V_2(t)) dt$$

$$\leq \int_0^T \lambda g(t, V_1(t)) + (1-\lambda) g(t, V_2(t)) dt$$

$$= \lambda G(V_1) + (1-\lambda) G(V_2).$$

Por lo que G es convexa y en consecuencia (Luzinor #1) es sci débil.

Por el teorema de Weierstraß - Hilbert - Tonelli, se concluye entonces que existe un minimizador $\square$