MA5801 Análisis Convexo y Dualidad
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Auxiliar 2

Existencia de Soluciones
16 de agosto de 2024

P1. (Funcionales de Nemitski) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ boleliano y $u : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función Borel-medible no negativa tal que para casi todo $t \in \Omega$, la función $u(t, \cdot)$ es sci. Pruebe entonces que para $p \in (1, \infty)$, el funcional $\Phi_u : L^p(\Omega \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi_u(x) = \int_\Omega u(t, x(t))\mu(\mathrm{d}t)$$

Es sci. A este funcional le llamamos *funcional de Nemitski asociado a* u.

P2. (Existencia de soluciones para el Cálculo de Variaciones) Sean $T \in (0, \infty)$ y $f, g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dos funciones que cumplen:

(i) f, g Borel medibles en $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.

(ii) $\forall t \in [0, T] : f(t, \cdot), g(t, \cdot)$ son sci.

(iii) Existe $c \in L^1([0, T], \mathbb{R})$ y $d > 0, p > 1$ reales tales que para todo $t \in [0, T]$ y $w, z \in \mathbb{R}^n$:

$$f(t, z) + g(t, w) \geq c(t) + d\|w\|^p$$

(iv) $\forall t \in [0, T]$, $g(t, \cdot)$ convexa.

(v) Existe $\hat{u} \in L^p([0, T], \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_0^T |g(t, \hat{u}(t))| \,\mathrm{d}t < \infty, \qquad \int_0^T |f(t, \hat{x}(t))| \,\mathrm{d}t < \infty$$

En que $\hat{x}(t) := x_0 + \int_0^t \hat{u}(s) \,\mathrm{d}s$ para $t \in [0, T]$. Pruebe entonces que el problema de cálculo de variaciones:

$$\begin{aligned} \inf_x \int_0^T f(t, x(t)) + g(t, \dot{x}(t)) \,\mathrm{d}t \\ x(0) = x_0 \end{aligned}$$

Tiene al menos una solución.