

73] a) $\Rightarrow$ Se $g = \nabla p$ con $p \in D'(\Omega)$, $v \in V_0$

$$(g, v) = \int_{\Omega} \nabla p \cdot v = \int_{\Omega} \partial_{x_1} p v_1 + \partial_{x_2} p v_2 + \partial_{x_3} p v_3$$

IPP con $v=0$ en $\partial\Omega$

$$= - \left[\int_{\Omega} p \cdot \partial_{x_1} v_1 + p \cdot \partial_{x_2} v_2 + p \cdot \partial_{x_3} v_3 \right]$$

$$= - \int_{\Omega} p \cdot \text{Div}(v)$$

$$= 0$$

Se Assume d resto

b) Se $v \in V \Rightarrow \exists (v_n) \in V_0$ tal que

$$v_n \xrightarrow{(1/n)} v \quad \text{y} \quad \text{div}(v_n) = 0$$

$$\Rightarrow v_n \xrightarrow{L^2} v, \quad \text{Div} v_n \xrightarrow{L^2} \text{Div} v \Rightarrow \forall \varphi \in L^2 \quad \int_{\Omega} v_n \varphi \rightarrow \int_{\Omega} v \varphi$$

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} v_n^j \varphi \rightarrow \int_{\Omega} \partial_{x_i} v^j \varphi$$

en particular $\int_{\Omega} \partial_{x_i} v_n^i \varphi \rightarrow \int_{\Omega} \partial_{x_i} v^i \varphi \Rightarrow \int_{\Omega} \text{div}(v_n) \varphi \rightarrow \int_{\Omega} \text{div}(v) \varphi$

finalmente como $\operatorname{div}(v) = 0$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \operatorname{div}(v) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in L^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(v) = 0 \text{ em } L^2 \Rightarrow v \in \tilde{V}$$

$$\Rightarrow V \subseteq \tilde{V}$$

c) Seja $g \in \tilde{V}^*$ por Hahn Banach $\hat{g} \in H^{-1}(\Omega)$

$$\text{tal que } g(u) = \int_{\Omega} \hat{g} \cdot u \quad \forall u \in \tilde{V}$$

Ilamens $\nabla K - \hat{g} \in H^{-1}$ por Teorema de Rham $\triangleq$
 $\Rightarrow K \in L^2$ si $(\hat{g}, v) \quad \forall v \in V_0$

Seja g tal que $g(v) = 0 \quad \forall v \in V$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \hat{g} \cdot v = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \hat{g} \cdot v = 0 \quad \forall v \in V_0 \subseteq V$$

$$\Rightarrow K \in L^2 \text{ com } \hat{g} = \nabla K$$

Sea $u \in \tilde{V}$

$$g(u) = \int_{\Omega} \hat{g} \cdot u = \int_{\Omega} \nabla K \cdot u \stackrel{\text{IPP}}{=} \int_{\Omega} K \cdot \operatorname{div}(u) \quad \begin{matrix} u=0 \\ \text{en } \partial\Omega \end{matrix}$$

Como $K \in L^2 \xRightarrow{\text{Teo de Riesz}} g(u) = 0$

$\Rightarrow V$ es denso en V^*

Notemos que V es cerrado en H_0^1
 Por otro lado V^* es un subespacio ~~de~~ H_0^1 (Visto ver que $\operatorname{div}(\cdot)$ es lineal)

$$\overline{V} = V \Rightarrow V = V^* = V^*$$

V es subespacio cerrado de $(H_0^1)^3$ (separable)

$\Rightarrow$ Es separable y Hilbert

1) Usando Rellich-Kondrakov

$$\Rightarrow W^{1,p} \hookrightarrow L^q$$

$$\forall q \leq p^* = \frac{Np}{N-p} = 6 \quad p=2, N=3$$

$$\Rightarrow W^{1,2}(H)^3 \hookrightarrow (L^4)^3 \Rightarrow V \hookrightarrow (L^4)^3$$

Propuesta 10 que queda de d)

$$e) \quad b(u, v, v) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i (\partial_{x_i} v_j) v_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i \partial_{x_i} \frac{(v_j^2)}{2}$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} - \sum_{i,j=1}^3 \partial_{x_i} (u_i) \cdot \frac{v_j^2}{2}$$

$$= - \int_{\Omega} \underbrace{\sum_{i,j=1}^3 \partial_{x_i} (u_i)}_{L^2} \underbrace{\frac{v_j^2}{2}}_{L^2} \quad (p_{\text{der}} \quad v \in L^4)$$

$$= \int_{\Omega} \underbrace{\sum_{i,j=1}^3 \partial_{x_i} (u_i)}_{L^2} \cdot \underbrace{\frac{v_j^2}{2}}_{L^2}$$

$$= 0$$

$$b(u, v, w) = - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \partial_{x_i} (u_i w_j) \cdot v_j = - \left(\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \partial_{x_i} u_i (w_j v_j) + \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i (\partial_{x_i} w_j) v_j \right)$$

$$= -b(u, w, v)$$

$\sum_i \Rightarrow \text{div } \gamma$ mismo