Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
14 de Octubre de 2024

Auxiliar 8

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

P1. Problema de Dirichlet en el disco unitario. El objetivo de esta pregunta es resolver el siguiente problema:

$$(PD)\begin{cases}\Delta u = 0 \text{ en } \Omega\\ u = f \text{ en } \partial\Omega\end{cases}$$

con $\Omega := D(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ y $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Para esto procedemos como sigue.

a) Exprese u en coordenadas polares (r,θ) y calcule su Laplaciano en estas variables.

b) Suponga que $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Encuentre ecuaciones diferenciales ordinarias para R y Θ.

c) Escriba condiciones de compatibilidad y resuelva las ecuaciones anteriores.

d) Determine la solucion del problema.

e) Demuestre la formula de Poisson en dimensión 2:

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f(\eta)\frac{1-|\xi|^2}{|\eta-\xi|^2}dS(\eta), \quad \forall \eta \in \Omega.$$

P2. Sea un dominio acotado en $\mathbb{R}^d$ y sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ una función armónica en Ω. Demuestre que:

$$\sup_{x,y\in\Omega}\frac{u(x)-u(y)}{x-y} =: M = M_1 := \sup_{x\in\Omega, y\in\partial\Omega}\frac{u(x)u(y)}{x-y}$$

Con esta igualdad demuestre la siguiente cota para el gradiente de u

$$M_0 := \sup_{x\in\Omega} Du \leq M$$

Finalmente, demuestre que si es convexa, entonces $M_0 = M$.

P3. (Como usar resultados de la Ecuación de Calor)

a) Escriba una formula explicita para las soluciones de

$$\begin{cases}u_t - \Delta u + cu = f \text{ en } \mathbb{R}^d\times(0,\infty)\\ u = g \text{ en } \mathbb{R}^d\times\{t=0\}\end{cases}$$

b) Dada la función $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, con $g(0) = 0$, derive la siguiente formula

$$u(t,x) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}g(s)ds$$

para las soluciones del problema

$$\begin{cases}u_t - u_{xx} = 0 \text{ en } \mathbb{R}_+\times(0,\infty)\\ u = 0 \text{ en } \mathbb{R}_+\times\{t=0\}\\ u = g \text{ en } \{x=0\}\times[0,\infty))\end{cases}$$

Hint: Considere la función $v(x,t) = u(x,t) - g(t)$ y extienda v para $x < 0$ de forma impar.