Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4802 Ecuaciones en Derivadas Parciales
6 de septiembre de 2024

Auxiliar Extra

Profesores: Rayssa Cajú y Claudio Muñoz
Auxiliares Benjamin Bórquez, Vicente Salinas y Jessica Trespalacios

[Criterio de Continuidad]
$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \iff \forall K \subset \Omega$ compacto, $\exists C(K) > 0, n(K) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C(K)\|\varphi\|_{N(K)}, \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega), \sup(\varphi) \subset K.$$

[Orden]
Diremos que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es de orden $N \in \mathbb{N}$ si este es el menor natural tal que:

$$\forall K \subset \Omega \text{ compacto}, \exists C(K) > 0, \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C(K)\|\varphi\|_N, \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega), \sup(\varphi) \subset K.$$

Si esto no se cumple se dice que T es de orden infinito.

P1. Determine el orden de las siguientes distribuciones

a) Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, la delta dirac δ_{x_0}.

b) Dado $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$,

c) Sea el operador valor principal definido por

$$\langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x|} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

d) Sea $\Omega = (0, \infty)$. Definimos Λ el funcional

$$\langle \Lambda, \varphi \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} (\partial^m \varphi)(1/m)$$

P2. *a*) Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tiene orden finito.

b) Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tiene soporte $\{x_0\} \subset \mathbb{R}^d$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, $(c_\alpha)_{(\alpha \in \mathbb{N})} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$T = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$$

c) Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ y $\sup(T) = K$ compacto en Ω, entonces para todo $V \subset \Omega$ abierto, tal que $K \subset V$, V acotado, existe $N(V) \in \mathbb{N}$ y funciones continuas $(f_\alpha)_{(\alpha \in \mathbb{N})} \subset \mathbb{R}^d$ con soporte en V tal que

$$T = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \partial^\alpha f_\alpha$$

Notas y Comentarios

$\boxed{P3}$ ¿Está bien escrito

c) $\langle P.V \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x|} \frac{\varphi(x)}{x} dx$

Usando cambio variable $= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < x} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$

Ahora si sigue normal, usando $\varphi(x) = 0 \; \forall x > M$ (Soporte compacto)

$$\langle P.V \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < x < M} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} + \frac{\varphi(0) - \varphi(-x)}{0 - (-x)} dx$$

$$\left|\langle P.V \frac{1}{x}, \varphi \rangle\right| \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < x < M} \left|\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\right| + \left|\frac{\varphi(0) - \varphi(-x)}{0 - (-x)}\right| dx$$

TVM

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \qquad 0 < \xi < x < M$$

$$\Rightarrow \|\varphi\|_1 \geq \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right|$$

$$|\langle P.V.\tfrac{1}{x}, \varphi\rangle| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<x<M} 2\|\varphi\|_1\, dx$$

$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0} 2\|\varphi\|_1 (M-\varepsilon) = 2M\|\varphi\|_1$$

M depende del compacto.

(si se les ocurre mejor φ :))

Sea φ con soporte $[0, 1]$

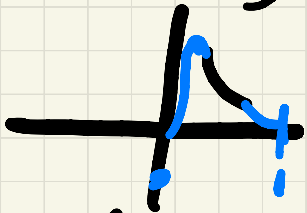
si: P.V $\frac{1}{x}$ Tiene orden $0 \Rightarrow \exists\, C$ (se fijo el soporte)

tal que $|\langle P.V.\tfrac{1}{x}, \varphi\rangle| \leq C\, \|\varphi\|_0$

Sea $\delta<1$, $\varphi \geq 0$, $\varphi(x)=x^{-1}$ para

$x \in [\delta/2, \delta]$ $\rightsquigarrow$ SUAVE entre

$[0, 1]$



$\Rightarrow \|\varphi\|_\infty \leq \frac{5}{\delta^2}$

Como $\varepsilon \to 0$ (se puede $\varepsilon < \delta/2$)

$$\langle P.V. \tfrac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < x < 1} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$$

$$|\langle P.V. \tfrac{1}{x}, \varphi \rangle| = \int_{\frac{\delta}{2} < x < \delta} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$$

$$\geq \int_{\frac{\delta}{2} < x < \delta} x^{-2} \, dx$$

$$\geq 7/\delta^3 \qquad \|\varphi\|_0 \cdot C$$

Si $\delta < \frac{1}{C} \Rightarrow |\langle P.V. \tfrac{1}{x}, \varphi \rangle| \geq 7C^3 > \overbrace{\frac{3}{\delta^2} \cdot C}$

$\cancel{*}$ Tiene orden 1

1) <u>Topología traza</u>

$\Rightarrow$ Que los abiertos sean los abiertos de $\mathbb{R}$ inter $(0,\infty)$

- <u>Comentario</u>: $(0,1]$ es cerrado pero no es compacto

- Sea K un compacto de $(0,\infty)$

Como $id: x \to x$ es continua

$$\Rightarrow \min_{x\in K} x = \bar{x} \in K \Rightarrow \bar{x} > 0$$

Por lo tanto K compacto

$$\Rightarrow K \subseteq [m, M], \quad m > 0$$

Ahora sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

Soporte $(\varphi) \subseteq \left[\frac{1}{\bar{m}}, \overline{M}\right]$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \partial^{(n)}\varphi(1/n) = 0 \quad \forall n > \bar{m}$$

se sale del soporte.

$$\Rightarrow \langle \Delta, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \partial^{(n)}\varphi(1/n)$$

$$\overset{*}{=} \sum_{n=1}^{\bar{m}} \partial^{(n)}\varphi(1/n)$$

$$\Rightarrow |\langle \Delta, \varphi \rangle| \leq \sum_{n=1}^{\bar{m}} |\partial^{(n)}\varphi(1/n)|$$

$$\leq \bar{m} \, \|\varphi\|_{\bar{m}}$$

$\varphi \in D'(\Omega)$, pero nos dio orden dependiendo del soporte

---

Supongamos que tiene orden finito N.

Tomemos φ con soporte

$$\left[\frac{1}{N+3/2}, \frac{1}{N+1/2}\right]$$

$$\Rightarrow \langle \Delta, \varphi \rangle = \partial^{(N+1)} \varphi\left(\frac{1}{N+1}\right)$$

Pero

$$\Rightarrow |\langle \Delta, \varphi \rangle| \leq C(k) \, \|\varphi\|_N$$

* pues podemos pedir a φ que $\|\varphi\|_N < |\varphi^{(N+1)}(1/N+1)|$

$\boxed{P2}$ $\Rightarrow$ Sea C soporte de $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$

(Soporte compacto)

Sea $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) \Rightarrow \varphi \in C^\infty(\Omega)$

Sea $\eta \geq 0$, $\eta(x) = 1$, $x \in C$

y $\text{Sop}(\eta) \subseteq V \subseteq \Omega$

$\Rightarrow \langle T, (1-\eta)\varphi \rangle = 0$

$\downarrow$ Soporte C^c

$\Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \eta\varphi \rangle$

Como $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$

$\Rightarrow T \in \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

con $\text{Soporte}(\psi) = K$

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C(K) \, \|\psi\|_{N(K)}$$

$$\Rightarrow |\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \eta \varphi \rangle|$$

$$\leq C(V) \, \|\eta \varphi\|_{N(V)}$$

Usando Leibnitz $\|\eta \varphi\|_{N(V)}$

$$\leq \underbrace{C(\eta)}_{C(V)} \, \|\varphi\|_{N(V)}$$

$$\Rightarrow |\langle T, \varphi \rangle| \leq \tilde{C}(V) \, \|\varphi\|_{N(V)}$$

Como V solo depende del soporte T y no de φ no hay problema

b) Por a) $\Rightarrow$ $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y

Tiene orden N

$\Rightarrow |\langle T, \varphi \rangle| \leq C(K) \|\varphi\|_N$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

Sea φ tal que $D^\alpha \varphi(x_0) = 0$

$\forall i \in \{1, \dots, N\}$

Como ~~$Sop(\varphi) \subseteq \{x_0\}^c$~~ (Falso)

Se me pasa en el aux

$\boxed{\text{Spg } x_0 = 0}$

Como $D^\alpha \varphi(0) = 0$

$\Rightarrow \exists R > 0$ tal que

$\forall x \in B(0, R)$, $|\alpha| \leq N$

$$|D^\alpha \varphi(x)| \leq \delta \quad \text{(Continuidad)}$$

$\underline{\text{PDQ}}$: $|D^\beta \varphi(x)| \leq \delta \, d^{N-|\beta|} |x|^{N-|\beta|}$

$\underline{\text{C.B}}$ Listo $|\beta| = N$

Si se tiene para $|\beta| = i+1$

$$\Rightarrow |D^\beta \varphi(x)| \leq \delta \, d^{N-i-1} \, |x|^{N-i-1}$$

Sea $|\gamma| = i$

$$\text{grad}\, D^\gamma \varphi(x) = (D_1 D^\gamma \varphi, D_2 D^\gamma \varphi, \dots, D_N D^\gamma \varphi)$$

Hip inducción

$$|\text{grad}\, D^\gamma \varphi(x)| \leq d \cdot \delta \, d^{N-i-1} \cdot |x|^{N-i-1}$$

$$|\text{grad}\, D^\gamma \varphi(x)| \leq \delta \, d^{N-i} \cdot |x|^{N-i-1}$$

$$\left|\frac{D^\gamma\varphi(x) - D^\gamma\varphi(0)}{x-0}\right| = \left|\frac{D^\gamma\varphi(x)}{x}\right| \overset{TVM}{\leq} |\text{grad}(D^\gamma\varphi(\xi))|$$

$$\Rightarrow |D^\gamma\varphi(x)| \leq \delta\, d^{N-i}\,|x|^{N-i} \quad ✓$$

Se prueba la inducción

Sea η con soporte$(\eta) \subset B(0,r)$

con $r < R$ y $\eta = 1$, $|x| \leq \frac{r}{2}$

$\eta\varphi$ tiene soporte en $B(0,r)$

$$\langle T, \underbrace{(1-\eta)\varphi}_{\text{soporte } B(0,\frac{r}{2})^c \text{ no tiene } \{0\}}\rangle = 0$$

$\Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \eta\varphi \rangle$

Como $D^{\alpha}(\eta \cdot \varphi)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha,\beta} D^{\alpha-\beta}\eta(x) D^{\beta}\varphi(x)$

$\Rightarrow \|\eta\varphi\|_N \leq C(N,d,r) \cdot \delta \cdot \|\eta\|_N$

$\Rightarrow |\langle T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, \eta\varphi \rangle| \leq C \cdot \|\eta\varphi\|_N$

$\leq C\, C(N,d,r)\, \delta \|\eta\|_N$

Como δ es arbitrariamente pequeño

$\Rightarrow |\langle T, \varphi \rangle| = 0$

Como $\operatorname{Ker}(T) \subseteq \operatorname{Ker}(\delta_{x_0}, \dots, D^{\alpha}\delta_{x_0})$

$\Rightarrow T = \sum_{\alpha} C_{\alpha} D^{\alpha} \delta_{x_0}$

c) Considerar Teorema 6.26

$\exists$ f continua tal que

$$\langle T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) (D^{\alpha} \varphi)(x) dx$$

Revisar demo en Rudin

bien buena

Sea $\eta = 1$ en K

y con soporte $(\eta) \subseteq V \subseteq \Omega$

$$\Rightarrow \langle T, \eta \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) (D^{\alpha} \eta \varphi) dx$$

Usando Leibnitz

$$\Rightarrow D^{\alpha}(\eta\varphi)(x) = \sum_{\beta\leq\alpha} C_{\alpha,\beta}\, D^{\alpha-\beta}\eta\, D^{\beta}\varphi(x)$$

definiendo $f_\beta = (-1)^{|\alpha-\beta|} C_{\alpha,\beta}\, f\cdot D^{\alpha-\beta}\eta$

$$\Rightarrow \langle T, \eta\varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{\beta\leq\alpha} f_\beta\, D^{\beta}\varphi(x)\,dx$$

Como $(1-\eta)\varphi$ soporte $\subseteq K^c$

$$\Rightarrow \langle T, \varphi\rangle = \langle T, \eta\varphi\rangle$$

y Soporte $(\eta) \subseteq V \Rightarrow$ Soport$(f_\beta) \subseteq V$

Se concluye.