$\boxed{P2}$ - Si $\forall \phi \in D(\Omega)$ $\langle T, \phi \rangle = 0 \Rightarrow T = S = 0$

- En caso contrario $\exists \psi \in D(\Omega)$ tal que

$\langle T, \psi \rangle \neq 0$, candidato $\lambda = \dfrac{\langle S, \psi \rangle}{\langle T, \psi \rangle}$

Pdq: $$\langle S, \phi \rangle = \frac{\langle S, \psi \rangle}{\langle T, \psi \rangle} \langle T, \phi \rangle, \ \forall \phi \in D(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \left\langle S, \phi - \psi \frac{\langle T, \phi \rangle}{\langle T, \psi \rangle} \right\rangle = 0, \ \forall \phi \in D(\Omega)$$

$$\langle S, \Phi \rangle = 0$$

Notar que $\langle T, \Phi \rangle = \langle T, \phi \rangle - \dfrac{\cancel{\langle T, \psi \rangle} \langle T, \phi \rangle}{\cancel{\langle T, \psi \rangle}}$

$= 0$

$\Rightarrow \langle S, \Phi \rangle = 0$, con lo que se concluye

b) <u>Idea</u>: Primero sea $T_1(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$

Sea $\phi \in C_0^\infty \Rightarrow \phi' \in C^\infty$ y

es facil verificar que $\phi' \in C_0^\infty$ (Propuesto)

$$\boxed{\phi(x) = \int_a^x \phi'(x)\,dx \quad \text{esta } C_0^\infty}$$

- Sea φ en $\ker(T_1) \Rightarrow \varphi = \phi'$, $\phi' \in C_0^\infty$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \phi' \rangle = -\langle T', \phi \rangle \underset{\text{def } T}{=} 0$$

$=0$

(a)

$\Rightarrow T = \lambda T_1 \Rightarrow T$ es constante

P3

c) (Indicación: Riesz–Thorin)

$$\|T\|_{L^{p_\theta}\to L^{q_\theta}} \leq \|T\|^{(1-\theta)}_{L^{p_0}\to L^{q_0}} \|T\|^{\theta}_{L^{p_1}\to L^{q_1}}$$

Con $\dfrac{1}{p_\theta} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$, $\dfrac{1}{q_\theta} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$

Si $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $q_0 = \infty$, $q_1 = 2$, $p_\theta = p'$ y $q_\theta = p$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{p'} &= 1-\theta + \frac{\theta}{2} \\ \frac{1}{p} &= \frac{\theta}{2} \end{aligned}\right\} \boxed{1-\theta = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}}$$

Usando esto se tiene.

$\boxed{P4}$ Como $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{\phi}(\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{C})$

Más aún $\hat{\phi}(\xi) \in H(\mathbb{C})$

(Esto es explícito gracias a la formula de derivada)

$$\frac{d}{d\xi}\hat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)(-2\pi i x)e^{-2\pi i x \xi}\,dx$$

(Todas las derivadas bien definidas)

Si suponemos que $\hat{\phi}|_{\mathbb{R}}(\xi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Tiene soporte compacto

$\Rightarrow \exists M > 0$ tal que $\forall x > M$

$\hat{\phi}(x) = 0$, por lo que $\hat{\phi}(x)$ tiene infinitos ceros, usando que los

Ceros de las funciones holomorfas

no nulas son Aislados.

$\Rightarrow \hat{\phi}(x)$ no puede ser no nulo

$\cancel{\star}$