

Auxiliar 11: Espacios de Hilbert

Recordando: Un espacio de Hilbert H es tal que existe un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que induce una norma que lo hace completo.

Dado $h \in H$, $\ell_h(x) = \langle x, h \rangle$ es un funcional lineal continuo

con $\|\ell_h\| = \|h\|$. En un Hilbert, todos los funcionales son de esta forma.

Teo: (Riesz) Sea $\ell \in H^*$, entonces existe un único $h \in H$

con $\|h\|_H = \|\ell\|_{H^*}$ t.f. $\frac{\langle \ell, u \rangle}{\ell(u)} = \langle u, h \rangle$.

Más aún, la asignación $h \mapsto \ell_h$ es lineal. Por lo tanto $H \cong H^*$.

Ahora, "formalmente", $H^{**} = (H^*)^* \cong H^* \cong H$, por lo que H es reflexivo.

Pero esto es incorrecto. Recordar que X (Banach) es reflexivo

S: la inyección canónica $J: X \rightarrow X^{**}$ es un isomorfismo

(no cualquier morfismo). Recordar que $Jx \in X^{**}$ actúa por

$(Jx)(\ell) = \langle \ell, x \rangle$ para $\ell \in X^*$. En la PA probamos esto bien.

PA H Hilbert es reflexivo. Sea H Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y H^*

su dual. El teo de Riesz nos dice que $\exists \psi: H^* \rightarrow H$

t.f. $y^*(x) = \langle x, \psi y^* \rangle \quad \forall x \in H, y^* \in H^*$.

(a) Por Riesz, el elemento ψy^* es único, por lo que $\psi: H^* \rightarrow H$ (lineal)

está bien definida. Veamos que $\psi(y^* + \alpha w^*) = \psi y^* + \overline{\alpha} \psi w^*$ (conjugado)

$\forall y^*, w^* \in H^*, \alpha \in \mathbb{C}$

El truco es usar la unicidad: $\forall x \in H$

$$(y^* + \alpha w^*)(x) = y^*(x) + \alpha w^*(x)$$

$$= \langle x, \psi y^* \rangle + \alpha \langle x, \psi w^* \rangle$$

$$= \langle x, \psi y^* + \bar{\alpha} \psi w^* \rangle \quad \left[\begin{array}{l} \text{Ojo! } \langle h, \alpha h' \rangle = \bar{\alpha} \langle h, h' \rangle \\ \langle \alpha h, h' \rangle = \alpha \langle h, h' \rangle \end{array} \right]$$

Así, $\psi y^* + \bar{\alpha} \psi w^* \in H$ es tal que $(y^* + \alpha w^*)(x) = \langle x, \psi y^* + \bar{\alpha} \psi w^* \rangle$

$\forall x \in H$. Pero ya tenemos un nombre para ese elemento, i.e.,

$\psi(y^* + \alpha w^*)$. Por Riesz (unicidad) debemos tener que

$$\psi y^* + \bar{\alpha} \psi w^* = \psi(y^* + \alpha w^*).$$

$\therefore \psi$ es lineal conjugado

Que es isometría es parte del TPR (teorema de representación de Riesz)

(b) Definimos en H^* , $[x^*, y^*] = \langle \psi y^*, \psi x^* \rangle$ (ojo con el orden)

Propuesto: esto cumple las propiedades de un producto interno.

Veamos que es completa (i.e. $(H^*, [\cdot, \cdot])$ es Hilbert).

Dem: Basta notar que $\forall x^* \in H^*$, $[x^*, x^*] = \langle \psi x^*, \psi x^* \rangle \stackrel{\text{TPR}}{=} \|x^*\|_*^2$.

Aquí $\|\cdot\|_*$ es la norma dual. Luego, la norma que induce $[\cdot, \cdot]$ es la misma que la norma dual y como esta siempre es completa.

Concluimos que $(H^*, [\cdot, \cdot])$ es Hilbert.

(C) Conclusión: H^* es reflexivo.

Dem: Como H^* es Hilbert, TRR nos da un isomorfismo $\phi: H^* \xrightarrow{\sim} H^{**}$ dado por $\phi \mapsto [\cdot, \phi]$. Luego, tenemos isomorfismos

$H \xrightarrow{\psi^{-1}} H^* \xrightarrow{\phi} H^{**}$ con $\psi^{-1}: h \mapsto \langle \cdot, h \rangle$. Veremos que

$J = \phi \circ \psi^{-1}$ y $\therefore J$ es un isomorfismo. Esto prueba bien que H es reflexivo

Sea $h \in H$ y probemos que $J(h) = (\phi \circ \psi^{-1})(h)$. ~~(Sea $\phi = \psi^{-1}(h) \in H^*$, es decir, ϕ es el funcional $x \mapsto \langle x, h \rangle$). Como ambas cosas son elementos de H^{**} , para ver que son iguales los evaluamos en algún $\phi \in H^*$. Sabemos por definición que $J(h)(\phi) = \phi(h)$.~~

Sea $h' = \psi \phi$ representando a ϕ , i.e., $\phi(x) = \langle x, h' \rangle \forall x \in H$. Luego,
 ~~$J(h)(\phi) = [\phi, \psi^{-1}(h)] \stackrel{(\text{def})}{=} \langle \phi, \psi^{-1}(h) \rangle = \langle h, \psi \phi \rangle = \phi(h)$~~

$\therefore J = \phi \circ \psi^{-1}$ y H es reflexivo.

P2) Hint: Ver que no se cumple la ley del paralelogramo.

P3) (a) H Hilbert y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $x_n \rightarrow x$, $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Prueba que

~~$\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$, $x_n \rightarrow x$ fuerte.~~

Dem: ~~El truco es expandir:~~

$$\begin{aligned} \|x_n - y_n\|^2 &= \langle x_n - y_n, x_n - y_n \rangle = \langle x_n, x_n \rangle - \langle x_n, y_n \rangle + \langle y_n, x_n \rangle + \langle y_n, y_n \rangle \\ &= \|x_n\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x_n, y_n \rangle + \|y_n\|^2 \end{aligned}$$

~~Ahora, notar que~~

Dem: El truco es expandir:

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x, x_n - x \rangle = \langle x_n, x_n \rangle - \langle x, x_n \rangle - \overline{\langle x_n, x \rangle} + \langle x, x \rangle \\ &= \langle x_n, x_n \rangle - 2\operatorname{Re}(\langle x_n, x \rangle) + \|x\|^2 \\ &= 2 - 2\operatorname{Re}(z) = 2 - 2\operatorname{Re}(z) \end{aligned}$$

Ahora, notar que

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{H}^*, \varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$$

$$\stackrel{\text{TRP}}{\Leftrightarrow} \forall h \in H, \langle x_n, h \rangle \rightarrow \langle x, h \rangle$$

Así, en nuestro caso $\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ y tomando límite obtenemos que $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x_n, x \rangle + \|x\|^2 \rightarrow 1 - 2 + 1 = 0$.

(b) $(x_n)_n, (y_n)_n$ con $\|x_n\| \leq 1, \|y_n\| \leq 1$ y $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow 1$.

P.D. $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$

Dem: La idea es la misma!

$$\|x_n - y_n\|^2 = \underbrace{\|x_n\|^2}_{\leq 1} - 2\operatorname{Re}\langle x_n, y_n \rangle + \underbrace{\|y_n\|^2}_{\leq 1}$$

$$\leq 2 - 2\operatorname{Re}\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow{\rightarrow 1} 0$$

$$\therefore \|x_n - y_n\| \rightarrow 0.$$

P4 (u) $\mathcal{H}$ Hilbert, $K \subseteq \mathcal{H}$ cerrado convexo no vacío. P.D. $x \notin K$, entonces $P_K(x) \in \partial K$.

Recordando: Dado $K \subseteq \mathcal{H}$ Hilbert + convexo cerrado $\neq \emptyset$, $x \in \mathcal{H}$, podemos encontrar $u = P_K(x) \in K$ punto más cercano a x , i.e.,

$$\|x - u\| = d(x, K) = \inf_{v \in K} \|x - v\| = d(x, K).$$

Importante: este punto u está caracterizado por:

$$u \in K \wedge \langle x - u, v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K$$

Ahora al problema. Sabemos que $u := P_K(x)$ está bien definido pues K convexo cerrado.

Supongamos que $u \notin \partial K$. Luego, $u \in \text{int} K$ y $\exists \varepsilon > 0$ t.f. $B(u, \varepsilon) \subseteq K$. Usamos esto

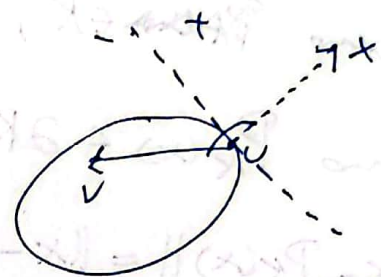
+ para contradecir que u es proyección. Sea

$$z := u + \frac{x - u}{\|x - u\|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{Ver figura})$$

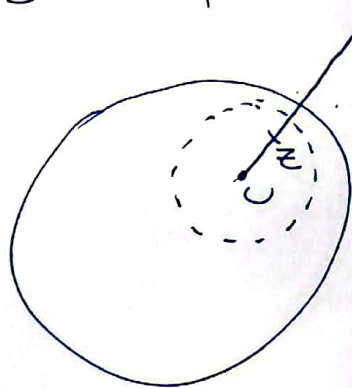
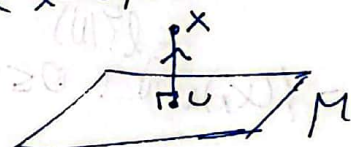
$$\text{Luego } \|z - u\| = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow z \in B(u, \varepsilon) \subseteq K.$$

$$\text{Pero } \langle x - u, z - u \rangle = \left\langle x - u, \frac{x - u}{\|x - u\|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle = \frac{\varepsilon}{2} \|x - u\| > 0 \quad \leftarrow$$

$$\therefore u \in \partial K.$$



obs: En el caso particular en el que $K = M$ es un s.e.v. cerrado, tenemos que $\langle x - u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in K$



(b) Supongamos ahora que ∂K convexo no vacía, de modo que $P_{\partial K}(x)$ está bien definido (∂K siempre es cerrado).

P.D. $P_K(x) = P_{\partial K}(x)$.

Dem: $P_{\partial K}(x)$

Como $P_{\partial K}(x) \in K$, $\|x - P_{\partial K}(x)\| \geq \inf_{v \in K} \|x - v\| = \|x - P_K(x)\|$.

Como $P_K(x) \in \partial K$, $\|x - P_K(x)\| \geq \|x - P_{\partial K}(x)\|$. Así,

$\|x - P_K(x)\| = \|x - P_{\partial K}(x)\| = d(x, \partial K)$. Luego, $P_K(x) \in \partial K$ es

tal que $\|x - P_K(x)\| = d(x, \partial K)$ y por unicidad debemos tener que

$P_K(x) = P_{\partial K}(x)$.

P5 $A = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : 0 \leq x_n \leq 1/n \text{ th}\} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Calcular P_A .

Sol: Notar que A es cerrado y convexo, así que esta pregunta tiene sentido.

Adicionalmente: Si $x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow y = P_A x \in A$ es uf.

$y_n = P_{[0, 1/n]} x_n$ th. Más concretamente:

$$y_n = \begin{cases} 0 & : x_n < 0 \\ x_n & : x_n \in [0, 1/n] \\ 1/n & : x_n > 1/n \end{cases}$$

Para probar que $y = P_A x$ basta ver que $\langle x - y, z - y \rangle_{\ell^2} \leq 0 \quad \forall z \in A$.

Pero

$$\langle x - y, z - y \rangle = \sum_{n \geq 1} \underbrace{(x_n - y_n)(z_n - y_n)}_{\leq 0} \leq 0 \quad \text{siempre! (Ponerse en casos).}$$

[P6] H Hilbert sobre $\mathbb{C}$.

Recordando: Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ lineal continuo. Para todo $y \in H$, $x \mapsto \langle Ax, y \rangle$ define un funcional lineal continuo en H . Por Riesz, existe un elemento, que denotamos $A^*y \in H$, que representa a φ , i.e.,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

Denotamos a A^* el adjunto de A . Es un elemento de $\mathcal{L}(H)$ con $\|A\| = \|A^*\|$.

Sea $A \in \mathcal{L}(H)$. Diremos que es autoadjunto si $A = A^*$, i.e.,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

$$(a) \text{ } A \text{ autoadjunto} \Leftrightarrow \langle Ah, h \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall h \in H.$$

Dem:

$(\Rightarrow)$ Si A es autoadjunto,

$$z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}.$$

$$\overline{\langle Ah, h \rangle} = \langle h, Ah \rangle \stackrel{A=A^*}{=} \langle Ah, h \rangle \stackrel{!}{=} \langle Ah, h \rangle \in \mathbb{R}$$

$(\Leftarrow)$ El truco para estos problemas es considerar expresiones de la forma $\langle A(x + \alpha y), x + \alpha y \rangle$. Notemos que

$$\underbrace{\langle A(x + \alpha y), x + \alpha y \rangle}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{\langle Ax, x \rangle}_{\in \mathbb{R}} + \alpha \langle Ay, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Ax, y \rangle + \underbrace{|\alpha|^2 \langle Ay, y \rangle}_{\in \mathbb{R}}$$

Así, $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in H$, $\alpha \langle Ay, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Ax, y \rangle \in \mathbb{R}$. En particular, esta expresión es igual a su conjugado:

$$\alpha \langle Ay, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Ax, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, Ay \rangle + \alpha \langle y, Ax \rangle$$

Teniendo en cuenta la propiedad de conjugación $\square$

P7] $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ con $\sup_n |\lambda_n| < \infty$

$$M_\lambda: \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \quad M_\lambda(x_1, x_2, \dots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$$

Determine M_λ^* y pruebe que M_λ es autoadjunto ss: $\lambda_n \in \mathbb{R} \forall n$.

Dem.

Tenemos que $\langle M_\lambda x, y \rangle = \langle x, M_\lambda^* y \rangle \quad \forall x, y \in \ell^2(\mathbb{N})$. Sea

$$x = e^n = (0, \dots, \underset{(n)}{1}, \dots). \text{ Luego, } M_\lambda e^n = (0, \dots, \lambda_n, \dots)$$

$$\text{y } \langle M_\lambda e^n, y \rangle = \lambda_n \overline{y_n}. \text{ Por otro lado, } \langle e^n, M_\lambda^* y \rangle = \overline{(M_\lambda^* y)_n}$$

$$\text{Así, } \overline{(M_\lambda^* y)_n} = \lambda_n \overline{y_n} \Rightarrow M_\lambda^* y_n = \overline{\lambda_n} y_n.$$

$$\therefore M_\lambda^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (\overline{\lambda_1} y_1, \overline{\lambda_2} y_2, \overline{\lambda_3} y_3, \dots).$$

Es claro que $M_\lambda^* = M_\lambda \Leftrightarrow \overline{\lambda_n} = \lambda_n \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \lambda_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$.